

Топология – 2
Задачи к лекции 9:
Клеточные гомологии
21 ноября 2023

Задача 1. Постройте клеточное разбиение (с как можно меньшим числом клеток) и вычислите клеточные гомологии а) бутылки Клейна; б) $S^1 \times (S^1 \vee S^1)$; в) $(S^1)^n$; г) $\mathbb{R}P^n$.

Задача 2. Покажите, что следующие пары пространств имеют разные гомологии:
а) $S^5 \times \mathbb{R}P^8$ и $S^8 \times \mathbb{R}P^5$; б) S^2 и $S^3 \times \mathbb{C}P^\infty$.

Задача 3. Пусть X — симплициальный комплекс. Покажите, что комплекс симплициальных цепей X совпадает с клеточным комплексом X .

Задача 4. Обозначим через c_k число клеток размерности k в компактном CW -комплексе M . Докажите, что $\chi(M) = \sum (-1)^k c_k$ не зависит от клеточного разбиения M .

Задача 5. а) Для экватора сферы $S^1 \subset S^2$ склеим противоположные точки: $x \sim -x$. Вычислите гомологии полученного пространства. б) То же для экватора $S^2 \subset S^3$.

Задача 6. Докажите, что k -остов n -мерного куба гомотопически эквивалентен букету k -мерных сфер, и найдите количество сфер в букете.

Задача 7. Постройте клеточное разбиение фактора $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ по умножению на $e^{2\pi i/n}$ и вычислите его гомологии.¹

Задача 8*. Пусть $M(n, k)$ получается приклеиванием $(n + 1)$ -мерной клетки к S^n по отображению степени k . Вычислите гомологии $M(n, k) \times M(m, l)$.

¹Этот фактор называется *линзовым пространством* $L(k, 1)$.