Топология – 2

Задачи к лекции 5: Теорема Уайтхеда. Симплициальные гомологии

17 октября 2023

Задача 1. Пусть отображение $f : X \to Y$ индуцирует биекцию $[A, X] \to [A, Y]$ для любого CW-комплекса A. Проверьте, что эта биекция *естественна* по A (то есть, другими словами, что это изоморфизм функторов $[-, X]$ и $[-, Y]$).

Задача 2. Пусть $\alpha, \alpha' : D^n \to Y$ — два отображения, согласованных на границе. Покажите, что они гомотопны неподвижно на границе если и только если сфероид в $\pi_n(X)$, определённый как α и α' на полушариях, является тривиальным.

Задача 3. Пусть есть два CW-комплекса, у которых $\pi_n \simeq G$ при фиксированном $n \geq 1$ и $\pi_k = 0$ при всех $k \neq n$. Докажите, что они гомотопически эквивалентны.

Задача 4. Покажите, что следующие пары пространств имеют одинаковые гомотопические группы[1]: **а)** $S^5 \times \mathbb{RP}^8$ и $S^8 \times \mathbb{RP}^5$; **б)** S^2 и $S^3 \times \mathbb{CP}^\infty$.

Задача 5. Дан связный CW-комплекс X.

а) Докажите[2], что для любого $n = 1, 2, \ldots$ существует пространство X_n, такое что $\pi_k(X_n) = 0$ при $k > n$, и отображение $X \to X_n$, индуцирующее изоморфизм $\pi_k(X) \to \pi_k(X_n)$ при $k \leq n$.

б*) Докажите, что можно выбрать X_n такими, чтобы для всех n существовали расслоения Серра $X_n \to X_{n-1}$ со слоем $K(\pi_n(X), n)$. Вся эта конструкция называется *башней Постникова.*

Задача 6*. **а)** Докажите, что для любого топологического пространства M существует клеточное пространство X и слабая эквивалентность $X \to M$. **б)** Проверьте, что такое X единственно с точностью до гомотопической эквивалентности.

Задача 7. Напомним, *комплексом* называется последовательность абелевых групп, соединённых гомоморфизмами

$$\ldots \to C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \to \ldots,$$

такая что $d_{n-1} \circ d_n = 0$ для любого n. Для комплекса $C_\bullet$ его *n-ными гомологиями* называется фактор $\ker d_n / \operatorname{Im} d_{n+1}$. Проверьте, что они корректно определены, т. е. что $\operatorname{Im} d_{n+1} \subset \ker d_n$.

Задача 8. **а)** Пусть $B_0, B_1, \ldots$ — множества симплексов триангулированного пространства, имеющих размерности $0, 1, \ldots$, множество вершин упорядочено. Определим *комплекс симплициальных цепей*, в нём C_n — свободный $\mathbb{Z}$-модуль, порождённый элементами B_n, для $a \in B_n$ положим $d_n(a) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot \partial_i a$. Здесь для симплекса $a = \{v_0, \ldots, v_n\}$, $v_0 < \ldots < v_n$, через $\partial_i a$ обозначена i-я грань $\{v_0, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\}$. Покажите, что это действительно комплекс.

б) Предположим, B имеет конечное число симплексов. Докажите, что $\sum_n (-1)^n \cdot \dim H_n(B) = \sum_n (-1)^n \cdot |B_n|$. Здесь $\dim$ — размерность главой части $\mathbb{Z}$-модуля, не учитывающая кручение.

Задача 9. Вычислите гомологии для **а)** графа K_5; **б)** дизъюнктного объединения k деревьев; **в*)** триангуляции S^2, имеющей 4 вершины.

Задача 10*. Какое наименьшее число вершин имеет триангуляция **а)** тора; **б)** $\mathbb{RP}^2$?

---

[1] Однако они не гомотопически эквивалентны, и, следовательно, между ними нельзя построить слабую эквивалентность. Это проще всего доказывать с помощью гомологий, что мы возможно вскоре сумеем сделать

[2] Здесь и далее нам может потребоваться факт, что пространство отображений $\mathrm{Map}(A, B)$, где A и B суть CW-комплексы, причём A компактен, само также имеет гомотопический тип CW-комплекса и, следовательно, для него выполнено утверждение теоремы Уайтхеда (неверное для произвольных пространств).