Топология – 2

Задачи к лекции 2:
Гомотопические группы и не только

19 сентября 2023

Задача 1. Пусть CW-комплекс X состоит из клеток размерности $< n$ (про такие комплексы говорят "n-мерный"), а CW-комплекс Y является n-связным. Докажите, что все отображения $X \to Y$ попарно гомотопны.

Задача 2. Докажите, что если все гомотопические группы CW-комплекса X тривиальны, то X стягиваем.

Задача 3. Приведите пример пространств X, Y и двух негомотопных отображений $X \to Y$, дающих гомотопные отображения $\Sigma X \to \Sigma Y$.

Последовательность групп $\ldots \to G_{k-1} \xrightarrow{\varphi_{k-1}} G_k \xrightarrow{\varphi_k} G_{k+1} \to \ldots$ называется *точной*, если $\ker \varphi_k = \mathrm{Im}\varphi_{k-1}$ при всех k.

Задача 4. а) Докажите, что в точной последовательности $0 \to G \to H \to 0$ группы G и H изоморфны.

б) Докажите, что в точной последовательности $0 \to G \xrightarrow{\varphi} H$ гомоморфизм φ инъективен, а в точной последовательности $G \xrightarrow{\psi} H \to 0$ гомоморфизм ψ сюръективен.

Задача 5. Как, имея точную последовательность $G_1 \to G_2 \to G_3 \to 0$ и точную последовательность $0 \to G_3 \to G_4 \to G_5$, составить точную последовательность $G_1 \to G_2 \to G_4 \to G_5$?

Задача 6. Дана точная последовательность абелевых групп $0 \to G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 \xrightarrow{\psi} G_3 \to 0$.

а) Докажите, что если найдётся $\psi' : G_3 \to G_2$, такой что $\psi \circ \psi' = \mathrm{Id}_{G_3}$, то $G_2 \simeq G_1 \oplus G_3$.

б) Докажите, что если найдётся $\varphi' : G_2 \to G_1$, такой что $\varphi' \circ \varphi = \mathrm{Id}_{G_1}$, то $G_2 \simeq G_1 \oplus G_3$.

в*) Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения для неабелевых групп.

Задача 7. (*Умножение Уайтхеда*) Пусть даны отображения $\alpha : S^m \to X$ и $\beta : S^n \to X$, сохраняющие отмеченную точку. Определим отображение $[\alpha, \beta] : S^{m+n-1} \to X$ как композицию граничного отображения $(m+n)$-мерной клетки стандартного клеточного разбиения $S^m \times S^n$

$$S^{m+n-1} \simeq \partial(D^m \times D^n) \to \mathrm{sk}^{m+n-1}(S^m \times S^n) = S^m \vee S^n$$

и отображения $S^m \vee S^n \to X$, заданного как α и β на компонентах.

а) Проверьте, что это корректно задаёт отображение $\pi_m(X) \times \pi_n(X) \to \pi_{m+n-1}(X)$.

б) Докажите соотношения $[\alpha, \beta_1 + \beta_2] = [\alpha, \beta_1] + [\alpha, \beta_2]$ и $[\alpha, \beta] = (-1)^{mn}[\beta, \alpha]$ при $m, n > 1$.

в*) Рассмотрим отображение $\Omega X \wedge \Omega X \to \Omega X$, задаваемое как коммутатор петель. Это позволяет определить *умножение Самельсона* на сфероидах: $S^{m+n-2} \simeq S^{m-1} \wedge S^{n-1} \to \Omega X \wedge \Omega X \to \Omega X$. Докажите, что произведение Уайтхеда при изоморфизме $\pi_*(X) \to \pi_{*-1}(\Omega X)$ переходит в произведение Самельсона, умноженное на $(-1)^{m-1}$.

г*) Для любых $\alpha \in \pi_m(X)$, $\beta \in \pi_n(X)$ $\gamma \in \pi_k(X)$ докажите, что

$$(-1)^{mk}[[\alpha, \beta], \gamma] + (-1)^{nm}[[\beta, \gamma], \alpha] + (-1)^{kn}[[\gamma, \alpha], \beta] = 0.$$

д*) Докажите, что произведение Уайтхеда любых сфероидов переходит в ноль при гомоморфизме надстройки.