18 февраля 2023

Семинар по Диофантовым приближениям

$\times 2 \times 3$ теорема Фюрстенберга (продолжение, часть 2)

$\Sigma = \{a^u b^v : u, v \in \mathbb{Z}_+\}$; $\Sigma_\alpha \{\{q\alpha\} : q \in \Sigma\}$

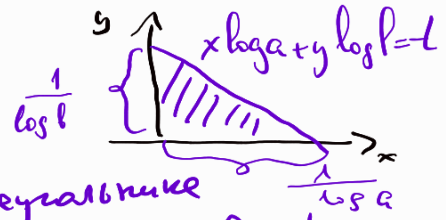
$\Sigma(M) = \{q \in \Sigma : q \leq M\}$; $\Sigma_\alpha(M) = \{\{q\alpha\} : q \in \Sigma(M)\}$

Теор Пусть $a, b \geq 2$ $(a, b) = 1$. Тогда $\forall\, \varepsilon, \delta > 0$ для всех достаточно больших $Q \in \mathbb{Z}_+$ и для всех A : $1 \leq A \leq Q$, $(A, Q) = 1$

Выполнено $\Sigma_\alpha(Q^{1+\delta})$ образует $\qquad \alpha = \frac{A}{Q}$

$$\frac{1}{(\log\log\log Q)^{1/8-\varepsilon}} \text{ - сеть на } [0,1]$$

Сегодня мы продолжаем док-во.



Из "черных ящиков":

$T(t)$ – кол-во целых точек в треугольнике $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $x,y>0$, $x\log a+y\log b\le t$

$$T(t)=\frac{1}{2\log a\log b}\cdot t^2 - t\left(\frac{1}{2\log a}+\frac{1}{2\log b}\right)+O\left(t^{1-\frac{1}{\beta-1}}\right)$$

(здесь $\forall \frac{p}{q}$ $\left|\frac{\log a}{\log b}-\frac{p}{q}\right|>\frac{c}{q^{\beta}}$)

Следствия:

1. $|\Sigma(M)| = T(\log M) \sim \dfrac{\log^2 M}{2\log a\log b}$

$$\Sigma=\{q_1<q_2<q_3<\dots<q_\nu<\dots\}$$

2. $\log q_\nu \sim \sqrt{2\nu\log a\log b}$

3. $q_{\nu+1}-q_\nu \ll \dfrac{q_\nu}{(\log q_\nu)^{\frac{1}{\beta-1}-\varepsilon}}$

$$\boxed{\beta_1=\frac{1}{\beta-1}+\varepsilon}$$

Указан. к 3. Найти такое $\Delta=\Delta(t)$

$$T(t+\Delta)-T(t)>0$$

$$q_{\nu+1}\le q_\nu+\Delta(q_\nu)$$

Начинаем двигаться дальше.

Лемма 1. $M<Q$ $\quad M_1=M\cdot Q$

Тогда $\Sigma_\alpha(M_1)-\Sigma_\alpha(M_1)=\{\xi_1-\xi_2 : \xi_j\in\Sigma_\alpha(M_1)\}$

будет Δ-плотно на $[0,1]$,

$$c\quad \Delta \ll \frac{1}{(\log\log M)^{\frac{1}{\beta-1}-\varepsilon}}.$$

Док. б

$\alpha = \frac{A}{Q}$

$\exists\, \eta', \eta'' \in \Sigma_\alpha(M)$ $\qquad \eta' = \{q'\alpha\},\ \eta = \{q\alpha\}$

$$\frac{1}{Q} \le \eta' - \eta'' < \frac{1}{|\Sigma(M)|} \ll \frac{1}{\log^2 M}$$

$q' \ne q'' < M$

обозначим $\boxed{\frac{1}{d} = \eta' - \eta''}$

$$|\Sigma(M)| \le d \le Q$$

K: $q_1 < q_2 \dots < q_k \le d < q_{k+1}$; $\boxed{q_j \in \Sigma(d)}$

$$D_d = \max_{1 \le i \le k} |q_{i+1} - q_i| \ll \frac{d}{(\log d)^{\beta_i}}$$

$q' \quad q'' \le M$

$$q_j q',\ q_j q'' \in \Sigma(MQ) = \Sigma(M_1)$$

$j \le k$

$$\boxed{z_j := \frac{q_j}{d} = q_j(\eta' - \eta'') \in \Sigma_\alpha(M_1) - \Sigma_\alpha(M_1)}$$

$q_j \le d \le Q$ $\qquad M_1 = MQ$

$\eta' = q'\alpha \quad q' \le M$

$$q_j \eta' = q_j \{q'\alpha\} \qquad \eta' = \{q'\alpha\}$$

$$\eta'' = \dots \qquad \eta'' = \{q''\alpha\}$$

$$q_j y'' = q_j \{q'' \alpha\}$$

$$y' - y'' = \frac{1}{d} \qquad \{q'\alpha\} - \{q''\alpha\} = \frac{1}{d}$$

$$\boxed{0 < q_j\{q'\alpha\} - q'\{q''\alpha\}} = \frac{q_j}{d} < 1$$

$$\{q_j q'\alpha\} - \{q_j q''\alpha\}$$

$$y' = q'\alpha - A \in \Sigma_\alpha(M)$$

$$y'' = q''\alpha - B \in \Sigma_\alpha(M)$$

$$\frac{1}{Q} \le y' - y'' = \frac{1}{d} = (q' - q'')\alpha - (A - B)$$

$$\le \frac{1}{|\Sigma(M)|}$$

$$q_j(y' - y'') = \underbrace{(q_j q' - q_j q'')\alpha - q_j(A - B)}_{\notin (0,1)}$$

$$q_j < d$$

$$\{q_j(y' - y'')\} = \{(q_j q' - q_j q'')\alpha\} =$$

$$= (q_j q' - q_j q'')\alpha - (q_j A - q_j B) =$$

$$= q_j((q' - q'')\alpha - (A - B)) =$$

$$= q_j(y' - y'')$$

$\{ab\} - a\{b\} \in \mathbb{Z} \quad a \in \mathbb{Z}$

$$\{q_j q'\alpha\} \in \Sigma_\alpha(M_1)$$

$$\{q_j q''\alpha\} \in \Sigma_\alpha(M_1)$$

$$0 < \{q_j q'\alpha\} - \{q_j q''\alpha\}$$

$$\{q_j q'\alpha\} = q_j q'\alpha - A \qquad (0,1)$$

$$B \quad \Downarrow \quad C$$

$$\{q_j q''\alpha\} = q_j q''\alpha - B \qquad \frac{q_j'}{d}$$

$$\overbrace{\{q_0 q'\alpha\} - \{q_0 q''\alpha\}}^{\ll(01)} = \overbrace{\boxed{q_j q'\alpha - q_j q''\alpha - (A - B)}}^{''}$$

$$\Sigma_\alpha(M_1) - \Sigma_\alpha(M_1)$$

$$C - (A - B) = 0$$

Финал леммы:

$$\eta_{i+1} - \eta_i = (q_{j+1} - q_j)\overbrace{(q' - q'')}^{\overset{\wedge}{\frac{1}{d}}} = \frac{q_{i+1} - q_i}{d} \le \frac{D_d}{d} \ll$$

$$\ll \frac{1}{(\log d)^{\beta_1}} \ll$$

$$\ll \frac{1}{} \quad \beta_1 \ll$$

$$\log |\Sigma(M)|$$

$$\ll \frac{1}{(\log\log M)^{\beta_1}}$$