18 февраля 2023

Спецкурс "Задачи теории диофантовых приближений"

Лекция №2 "Вместо введения, продолжение".

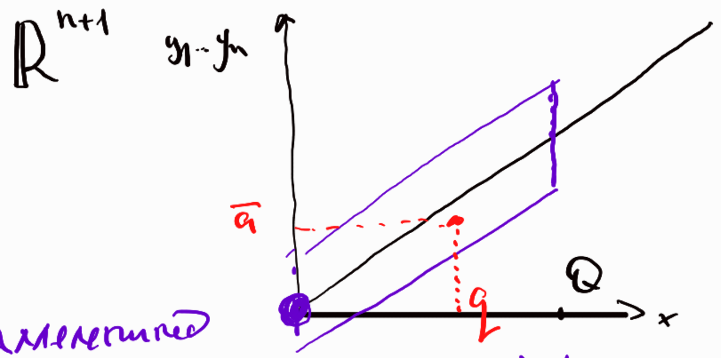
О принципе Дирихле.

Теорема Дирихле о совместных приближениях $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

$$\min_{q \le Q^n} \max_{1 \le j \le n} \|q\alpha_j\| \le Q^{-1}$$

! 0

$\|\xi\| = \min|\xi - a|$ Расстояние до ближ. целого.



одномерное линейное подп-во
$\begin{cases} y_1 = \alpha_1 x \\ \dots \\ y_n = \alpha_n x. \end{cases}$

ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

$$\Pi_Q = \{ (x, \bar{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \underline{0 \le x \le Q^n} \quad \max_{1\le j\le n} |x\alpha_j - y_j| \le Q^{-1} \}$$

$\underline{|x| \le Q^n}$

$\bar{\Pi}_Q$

$\bar{\Pi}_Q$ - выпукл. О-симм. и $\mathrm{Vol}\, \bar{\Pi}_Q = 2^{n+1}$
поэтому по теор Минковского о вып. теле
в нём есть нетривиальная ($\neq 0$) целая точка

Упражнение: узнать / повторить доказательство теоремы Минковского о выпуклом теле

Две задачи: Последовательность $n^2\alpha$.

Теорема Хинчина Пусть $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$$\min_{q \le Q} \|q^2\alpha\| \le \frac{10 \log\log Q}{\log Q}$$

известны более сильные резуль-таты [illegible].

Док-во: для параметров H, W

$$q_1 \in \mathbb{Z}_+ \quad : \quad \min_{q_1 \le H} \|q_1 \alpha\| \le H^{-1}$$

$\alpha_1 = q_1 \alpha$

Индуктивное построение:

Пусть заданы числа $\alpha_1 \, .. \, \alpha_t$, $q_1 \, .. \, q_t \in \mathbb{Z}_+$

Построим число $q_{t+1} \in \mathbb{Z}_+$ из условия

$$\begin{cases} \max\limits_{1 \le j \le t} \|q_{t+1} \alpha_j\| \le H^{-1} \\ q_{t+1} \le \underline{H^t} \end{cases}$$

определим $\alpha_{t+1} = q_{t+1} \alpha$.

Пусть t меняется до W

$$\alpha_1 = q_1 \alpha, \quad \alpha_2 = q_2 \alpha, \quad \dots, \quad \alpha_W = q_W \alpha.$$

$$\underline{\|q_j q_i \alpha\| \le H^{-1} \quad 1 \le i < j \le W}$$

$\frac{1}{W}$

$[0\ 1]$

$$\alpha_i = q_i \alpha \qquad q_t = q_t \alpha$$

$$\|q_{t+1} \cdot (q_i \alpha)\| \le H^{-1}$$

$$\underbrace{\{q_1^2 \alpha\}, \{(q_1^2 + q_2^2)\alpha\}, \dots, \{(q_1^2 + \dots + q_W^2)\alpha\}}_{W \text{ чисел.}}$$

По принципу Дирихле $\exists \; u, v$
$1 \le u \le v \le W$

$$\underline{\|(q_u^2 + q_{u+1}^2 + \dots + q_v^2)\alpha\| \le W^{-1}}$$

Берем $q = q_u + \dots + q_v \le H + H + H^2 + \dots + H^W \le$
$\le H^{W+2}$

$$\boxed{q \le H^{w+2}}$$

$$\|q^2\alpha\| = \Big\| \sum_{j=1}^{v} q_j^2\alpha + 2\sum_{j>i} q_j q_i \alpha \Big\| \le$$

$$\le W^{-1} + W^2 H^{-1}$$

$$q \le Q = H^{w+2}$$

Выбор параметров: $W^{-1} \asymp W^2 H^{-1}$

$$\boxed{H \asymp W^3}$$

т.е. $q \le Q$

$$Q = W^{3(W+2)}$$

$$\ln Q \asymp W \log W$$

$$\boxed{W \asymp \frac{\log Q}{\log\log Q}}$$

$$\boxed{\min_{q\le Q} \|q^2\alpha\| \ll \frac{\log\log Q}{\log Q}}$$

Упражнение: $\forall\, k \in \mathbb{Z}$ $k \ge 2$

а) Докажите, что

$$\min_{q\le Q} \|q^k\alpha\| \to 0, \quad Q \to \infty$$

б) конкретизировать скорость стремления к 0.

Замечание

$\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Теорема Захареску

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ ∞ много $q \in \mathbb{Z}_+$ таких что

$$\|q^2\alpha\| < q^{-2/3+\varepsilon}$$

решено (плохо) 1995 год.

1920 год Виноградов $\min_{q \le Q} \|q^2\alpha\| \le Q^{-1/4+\varepsilon}$

Heilbronn $-1/2$

Плохо приближаемые (метод Переса-Шмидта)

$\exists \alpha : \forall q \quad \|q^2\alpha\| > \frac{1}{100\, q \log q}$

«Слабая гипотеза В. Шмидта».

Шмидт: Верно ли что $\exists \alpha$ такое что

(•) $\inf_{q \in \mathbb{Z}_+} q \|q^2\alpha\| > 0$ не известно.

или хотя бы

$\inf_q q \log q \|q^2\alpha\| > 0$ известно

Принцип Дирихле и углы между подпространствами.

$\mathbb{R}^4 \supset \mathcal{L}$ - двумерное подпространство. $\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{pmatrix}$.

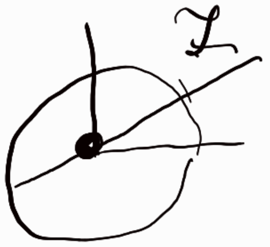
$\{(x_1, x_2, y_1, y_2)\}$ Будем считать

$\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^4$ $\quad \mathcal{L} : \{ \; y_1 = \Theta_{11} x_1 + \Theta_{12} x_2 = L_1(x)$

$$y_2 = \theta_{21} x_1 + \theta_{22} x_2 = L_2(x)$$

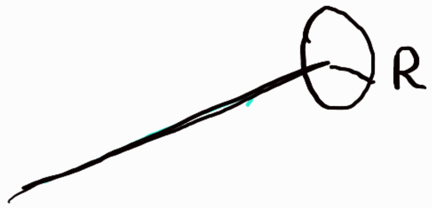
Теорема Дирихле.

$$\min_{\substack{(q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2 \\ 0 < \max\limits_{1 \le j \le 2} |q_j| \le Q}} \max_{1 \le i \le 2} \| \theta_{i1} q_1 + \theta_{i2} q_2 \| \le Q^{-1}$$



$$\min_{\substack{z \in \mathbb{Z}^4 \\ 0 < |z| \le Q}} \operatorname{dist}(z, \mathcal{L}) \le \frac{\text{const}}{Q}$$

$|\cdot| = |q|_\infty$



$\mathbb{R}^4$

$$\Pi = \{ \underbrace{|x_1|, |x_2| \le Q}_{\text{большие измерения}} \quad \overbrace{|y_1 - L_1(x)| \le R}^{z_1 \ \text{короткие}} \quad \underbrace{|y_2 - L_2(x)| \le R}_{z_2} \}$$

$$\operatorname{Vol} \Pi = 16 Q^2 R^2$$

$16 = 1$

больше тем для, чтобы поймать ненулевую точку по Минковскому

замена переменных с определителем 1

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 - L_1(x) \\ y_2 - L_2(x) \end{pmatrix}$$

Определение. $A, B \subset \mathbb{R}^4$ для линейных подпространств

$$\varphi(A, B) = \min_{\substack{a \in A \setminus \{0\} \\ b \in B \setminus \{0\}}} \angle\, a, b.$$

Контрольный вопрос.

$$A \cap B \ni 0$$

пусть $A \cap B \neq \{0\}$, тогда $\varphi(A, B) = 0$

Опр B (Вполне) рациональное подпространство если $\dim \Gamma_B = \dim B$

B – двумерное подпр. в $\mathbb{Z}^4$ $\quad \Gamma_B = \mathbb{Z}^4 \cap B$ – это решетка

Иными словами B рациональное $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{Z}^4 \cap B$ полная решетка в B

Опр $H(B)$ – высота рационального подпространства B

$H(B) \overset{def}{=} \det \Gamma_B$ – определитель полной решетки Γ_B

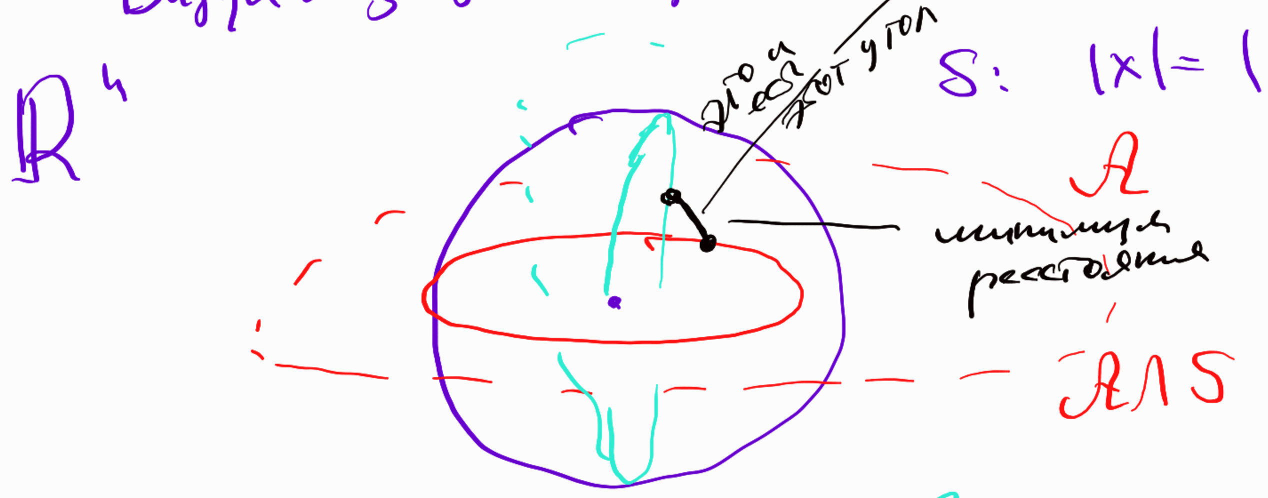
Задача: Дано A – двумерное под-пр-во в $\mathbb{R}^4$. Среди всех двумерных РАЦИОНАЛЬНЫХ под-пр. в B найти такое, что

$\varphi(A, B)$ минимальный.

A – фиксировано. надо оценить

$$\min_{B:\ H(B) \le H} \varphi(A, B).$$

Визуализация угла $\varphi(A, B)$



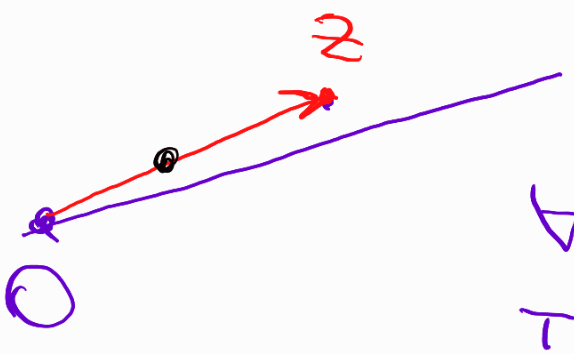
B

Теорема Шмидт

Для любого ИРРАЦИОНАЛЬНОГО двумерного подпространства $A \subset \mathbb{R}^4$ существует бесконечно много двумерн. РАЦИОНАЛЬНЫХ подпространств $B \subset \mathbb{R}^4$ таких что
$$\varphi(A, B) < \frac{const}{H(B)^{3}}.$$

Чудо: E. Joseph показал 3 здесь оптимален.

Док-во теоремы Шмидта



$\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^4$.

$\forall Q > 0 \ \exists z \in \mathbb{Z}^4 \setminus \{0\}$ такое что $|z| \le Q$
$$\mathrm{dist}(z, \mathcal{L}) \ll Q^{-1}$$

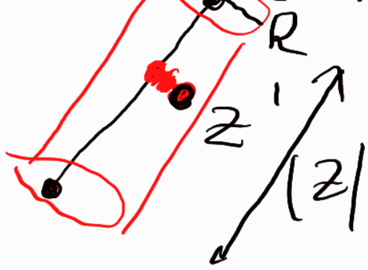
Уточнение: можно считать $z = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{Z}^4$ и $\text{НОД}(z_1, z_2, z_3, z_4) = 1$, то есть, что точка z примитивна.

Пишу ЕЩЁ ОДНУ теорему Дирихле:

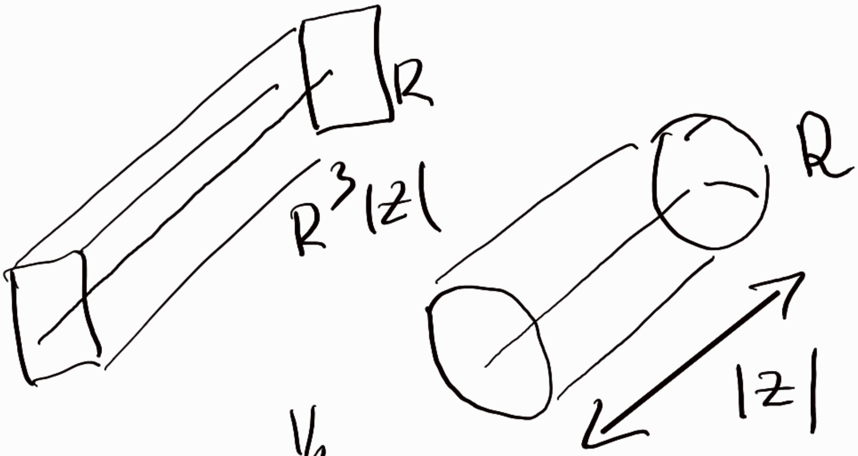
$\exists z' \in \mathbb{Z}^4$: $z' \neq 0, z$, такая что

$\ell(z)$ $z \subset \mathbb{R}$

$$\begin{cases} |z'| < |z| \\ \operatorname{dist}(\ell(z), z') \leq |z|^{\boxed{-1/3}} \end{cases}$$

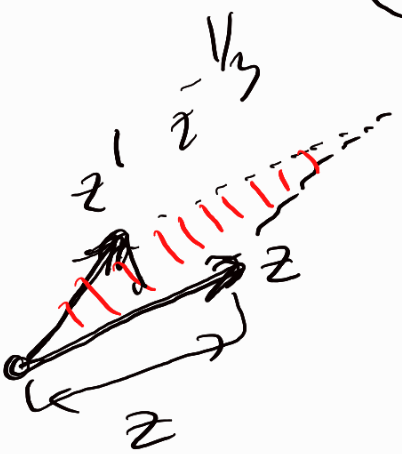


$\ell(z)$ - одномерное подпр-во, порождённое z



$\mathbb{R}^4$

Объем солнеч. объем $\asymp |z| \cdot R^3 \asymp 1$



z и z' порождают двумерное рац. подпр-во

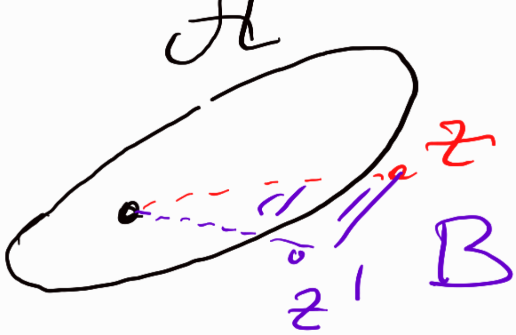
B $\qquad H(B) \leq |z|^{2/3}$

Итак, мы доказали

$\forall Q \quad \exists \quad B$ - двумерн. рац. под. пр-во:

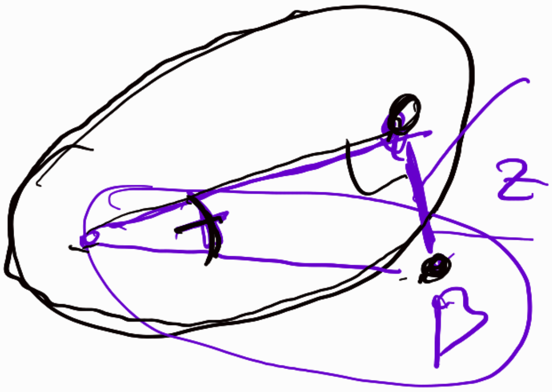
$$H(B) \leq |z'|^{2/3} \leq Q^{2/3}$$

$$\varphi(A, B) \leq \frac{\operatorname{dist}(z, A)}{|z|} \leq \frac{1}{|z| Q}$$



$\mathrm{dist}(A, z) \ll Q^{-1}$

Q^{-1}



$$\boxed{\varphi \le \frac{\mathrm{dist}(A,z)}{|z|}}$$

$$\forall Q \quad \exists B \quad \begin{cases} H(B) \le |z|^{2/3} \le Q^{2/3} \\ \varphi(A,B) \ll \dfrac{1}{|z|\,Q} \end{cases}$$

2

в сколь... точк $\to$ $|z| \ll Q$

$$\boxed{\varphi(A,B) \ll \frac{1}{Q\, H(B)^{3/2}} \le \frac{1}{H(B)^3}}$$

$B \quad H(B)$

Определен. A называется
(вполне) иррациональным

Вполне ...

Если $\forall$ B двумерного и вполне рационального выполнено $A \cap B = \{0\}$

Д.в. закончено.

Упр. Доказать, что существует вполне иррац. подпространства.