4 марта 2023

с/к Задачи теории диофантовых приближений

Спектр Дирихле.

$\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \psi_\alpha(t) = \min_{q \le t} \|q\alpha\|$

$$d(\alpha) = \limsup_{t\to\infty} t\,\psi_\alpha(t) = \limsup_{n\to\infty} q_{n+1}\|q_n\alpha\| = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{\alpha_n^*}{\alpha_{n+1}}}$$

$\alpha_n^* = [0; a_n, a_{n-1}, \dots, a_1]$

$\alpha_{n+1} = [a_{n+1}; a_{n+2}, \dots]$

$\mathbb{D} = \{ d : \exists \alpha \in \mathbb{R} \ \ d = d(\alpha) \} \subset [0,1]$

Спектр Дирихле.

<u>Теор 1</u> Секереш $\quad \min \mathbb{D} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} = d\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$

Некоторые история.

Теор Бореля среди q_{n-1}, q_n, q_{n+1} найдется q_i

$$\|q_i\alpha\| < \frac{1}{\sqrt{5}\,q_i}$$

Теорема Моримото

$\forall n \quad \exists j \in \{n-1, n, n+1\}$ такое что

$$q_{j+1}\|q_j\alpha\| > \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$\left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n^*}\right)$

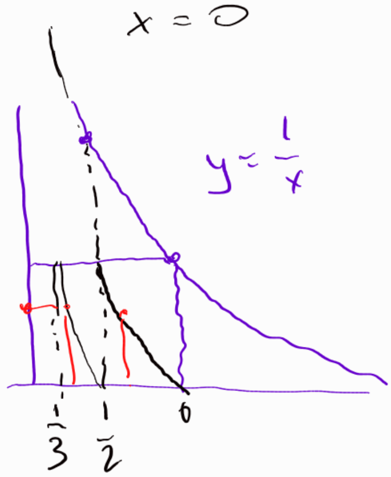
D. 6 Преобразование Гаусса

$$T : [0,1] \to [0,1] \qquad T(x) = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{x} \right\} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$T([0; a_1, a_2 \dots]) = [0; a_2, a_3 \dots]$$

сдвигает a_1

не биекция



Естественное расширение T

$$T(x,y) : [0,1]^2 \to [0,1]^2$$

$$T(x,y) = \begin{cases} \left(\left\{ \frac{1}{x} \right\}, \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right] + y} \right) & x \neq 0 \\ (0, y) & x = 0 \end{cases}$$

$T(x) = y$

$$a_{-3} \; a_{-2} \; a_{-1} \; a_0 \; a_1 \; a_2 \; a_3 \qquad a_n \,|\, a_{n+1} \,|\, a_{n+2} \; a_{n+3}$$

$$\alpha_n^* \in (0,1) \qquad \alpha_n^* \qquad \alpha_{n+1}$$

$$\alpha_{n+1}^{-1} \in [0,1]$$

$$T(\alpha_{n+1}^{-1}, \alpha_n^*) = (\alpha_{n+2}^{-1}, \alpha_{n+1}^*)$$

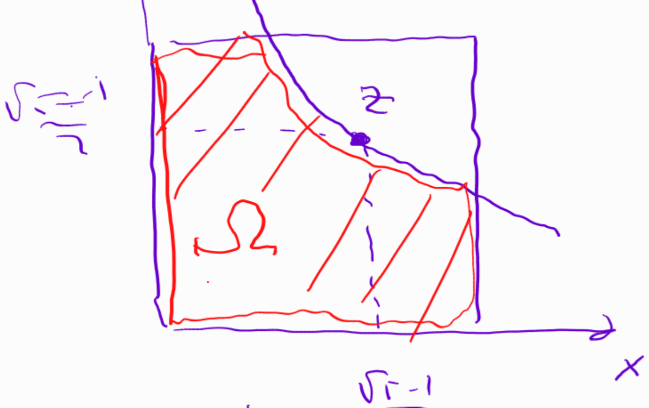
$T(x,y)$ биекция.

$$\exists j \in \{n-1, n, n+1\}$$

$$\alpha_j^* \cdot \frac{1}{\alpha_{j+1}} < \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$$

доказать это.

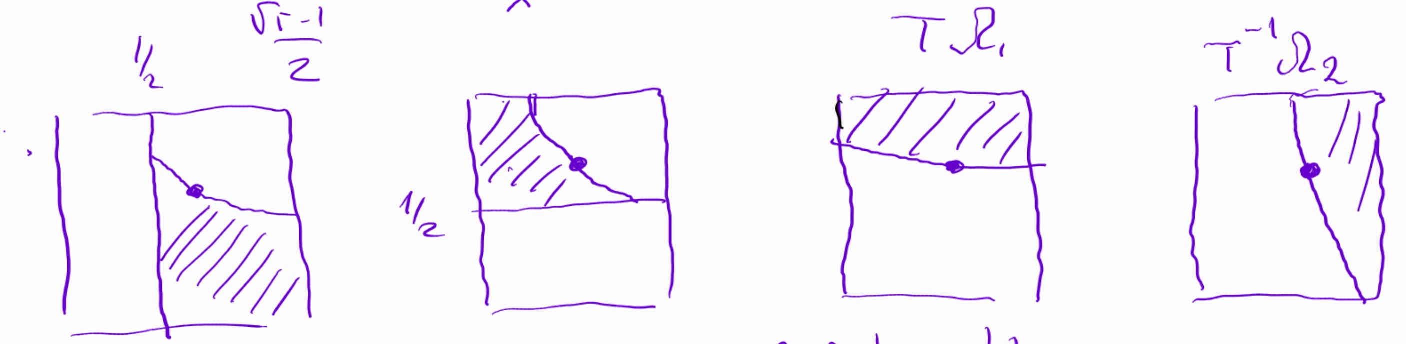
y ... $T(\dots)$



$$xy = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 \qquad T(z) = z$$

$$\Omega \cup T\Omega \cup T^{-1}\Omega$$

$$T\Omega \supset T\Omega_1 \qquad T^{-1}\Omega \supset T^{-1}\Omega_2$$



$$\Omega_1 = \Omega \cap \{x \geq \tfrac{1}{2}\} \qquad \Omega_2 = \Omega \cap \{y \geq \tfrac{1}{2}\}$$

$xy \leq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$

$x \geq \frac{1}{2}$

$$T\Omega_1 : \quad \frac{1}{1+x}\left(\frac{1}{y}-1\right) \geq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$$

$$z \in T^{-1}\Omega_2 \qquad \frac{1}{1+y}\left(\frac{1}{x}-1\right) \geq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$$

$$Tz \in \Omega_2 \qquad xy \leq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$$

(x, y) —

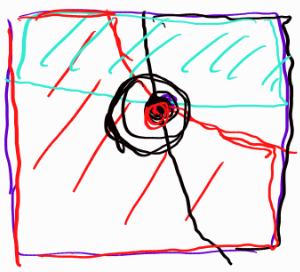
$$\boxed{\left\{\frac{1}{x}\right\} \cdot \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]+y} \leq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}$$

$$\frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]+y} \geq \frac{1}{2}$$

$$2 \geq \left[\frac{1}{x}\right] + y$$

$$\left[\frac{1}{x}\right] = 1$$

$$\left\{\frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{x} - 1$$



$\alpha_j^* \in \mathbb{Q}$

$$\exists j \in \{n, n-1, n+1\}$$

$$\frac{1}{\alpha_{j+1}} \cdot \alpha_j^* \leq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$$

невозможно
строгое

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha_{j+1}} \alpha_j^*} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{1 + \alpha_j^*} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

α_{i+1}

Дискретная часть $\mathbb{D}$

Morimoto, Lesca

$$d(\alpha) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{1+\alpha_n^*/\alpha_{n+1}}$$

$$\boxed{K(\alpha) = \limsup_{n\to\infty} \alpha_{n+1}\cdot\frac{1}{\alpha_n^*}}$$

> 1

Теор $\mathbb{D} \setminus [K_*\ \ 1]$ счетное мн-во.

$$K_* = \frac{1}{1+\frac{1}{2+\sqrt{5}}}$$

причем Если $d(\alpha) < K_*$ то

$\exists k\quad \alpha \sim \beta_k$

$\beta_0 = [\overline{1}] = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

кор. $\beta_1 = [\overline{1;2}] = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$F_3x^2 - 2F_2x - F_2 = \cancel{2x^2 - 2x - 1}$

$n \geq 1$

$\beta_n = [\underbrace{\overline{1 \ldots 1}}_{2n-1}, 2]$

<u>Упражнение</u> при $n \geq 1$

доказ. $F_{n+2}\beta_n^2 - 2F_{n+1}\beta_n - F_{n+1}$

$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2$

F_j - числа Фибоначчи

$\mathbb{D}$ $\quad K_* \longleftrightarrow [d^*\ \ 1]$

дискр часть

$d(\beta_n) \uparrow \qquad \lim_{n\to\infty} d(\beta_n) = K_*$

Схема доказательства: надо найти все α, такие что

$$\boxed{K(\alpha) < 2+\sqrt{5}}$$

$K(\alpha) = \limsup_{n\to\infty} \alpha_{n+1}/\alpha_n^{o}$

Перебор случаев.

1° $\exists\, \infty$ мн. n $a_n \geqslant 3$

$K(\alpha) > 2+\sqrt{5}$

следствие случая 1°: $a_n \in \{1, 2\}$

2° $\exists\, \infty$ много n : $(a_n, a_{n+1}) = (2, 2)$ пет(ф)ри

После случая 2° остается только

$$\alpha = [\ldots\ 2\ 1_{r_1}\ 2\ 1_{r_2}\ 2\ 1_{r_3}\ \ldots]$$

3° $\exists\, \infty$ много r_i, r_j разной чётности.

4° все r_j чётные и $\exists$ б.б. $r_i \neq r_j$

5° —— " —— нечётные —— " ——

6° все r_j чётные равные.

$1^\circ - 6^\circ \Rightarrow K(\alpha) > 2+\sqrt{5}$.