1 апреля 2023

С/к Задачи теории Диофантовых приближений

Иррациональные подпространства и наилучшие приближения

<u>Коммер</u>

$m = n = 2$

Задача $\exists$ ли Θ 2×2 матрица у которой $R(\Theta) = 2$?

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{1m} \\ \theta_{n1} & \theta_{nm} \end{pmatrix} \longmapsto \mathcal{L}_\Theta$$

$m+n=d$ $\qquad z=(x,y)\in\mathbb{R}^d$

$x\in\mathbb{R}^m,\ y\in\mathbb{R}^n$

$\mathcal{L}_\Theta = \{z : y = \Theta x\}$. $\dim \mathcal{L}_\Theta = m$

Сегодня предполагаем что Θ хорошая

Θ — хорошая матрица

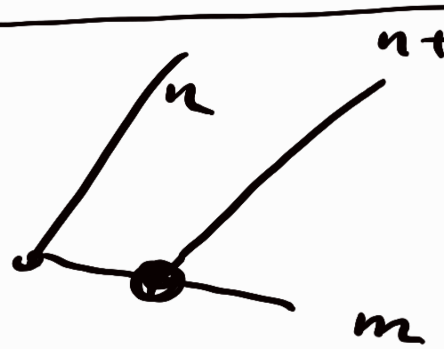
(def: послед. наил. прибл. к Θ

[однозначно определен…
бесконечна)

Определение $\mathcal{L}_\Theta$; Θ называется вполне иррациональным

Если $\forall$ вполне рац π $\dim \pi = d - \dim \mathcal{L}_\Theta$

выполнено $\pi \cap \mathcal{L}_\Theta = \{0\}$



$m+n=d$

$\mathbb{R}^d$

π - подпр-во $\mathbb{R}^d$

$\pi \cap \mathbb{Z}^d$ - решётка

$$\boxed{\dim \pi \cap \mathbb{Z}^d = \dim \pi}$$

(вполне) π рациональн. решётка

$m=n=2 \quad d=4$

Упр 1

$$\Theta = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

Если $\Delta, \alpha, \beta, \gamma, \delta, 1$ лин. нез. над $\mathbb{Q}$ то

Θ вполне иррациональн

Упр2 Обратное неверно.

$$R(\Theta) = \min\{s : \exists\ \mathcal{J} \subset \mathbb{R}^d_b \text{ под-ч. размерности } s\ \exists\ \nu_0\ \forall \nu \geqslant \nu_0\ z_\nu \in \mathcal{J}\}.$$

Теор. Пусть Θ вполне иррац. !

Тогда.

(1) Если $m=1$ (соблюдается) то $R(\Theta) = d = n+1$.

(2а) Если $n=1$ $m \geqslant 2$ то $R(\Theta) \geqslant 3$.

(2б) Если $n=1$ $m \geqslant 2$ то $\exists\ \Theta$ вполне ирр: $R(\Theta) = 3$.

(3а) Если $m, n \geqslant 2$ и $n \leqslant m$ то $R(\Theta) \geqslant n+2$ НОВОЕ

(3б) Если $m, n \geqslant 2$ $n \leqslant m$ то $\exists$ вп. ирр. Θ такое что $R(\Theta) = n+2$

(4а) $m, n \geqslant 2$ $n > m$ то $R(\Theta) \geqslant n+1$ (Всегда некорректно)

(4б) $m, n \geqslant 2$ ... $\exists$ ... $R(\Theta)$

$n > m \quad \exists\, \Theta : R(\Theta) = n+1$

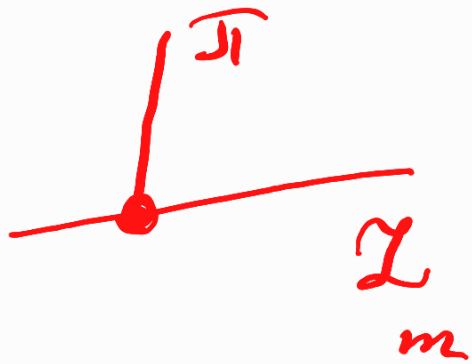
никто не задокументировал

Сегодня докажем (3а) и (4в)

(3а) **Упр** Докажем $R(\Theta) \leq n$ не бывает.

Мы докажем $R(\Theta) = n+1$ не может быть.

$$y = \underset{n}{\overset{m}{\Theta}} x$$



$y \in \mathbb{R}^n \quad x \in \mathbb{R}^m$

$\dim \Pi = n+1$

↑ из определения $R(\Theta)$

Упр $\boxed{\dim(\Pi \cap L) = 1}$

Рассмотрим н. п. $z_\nu = (x_\nu, y_\nu)$

$$|x| = \max_j |x_j|$$

$$\|\Theta x\| = \max_i \|\theta_{i1} x_1 + \dots + \theta_{im} x_m\|$$

$$\|\Theta x_\nu\| < |x_{\nu+1}|^{-\frac{m}{n}} \leq |x_{\nu+1}|^{-1}$$

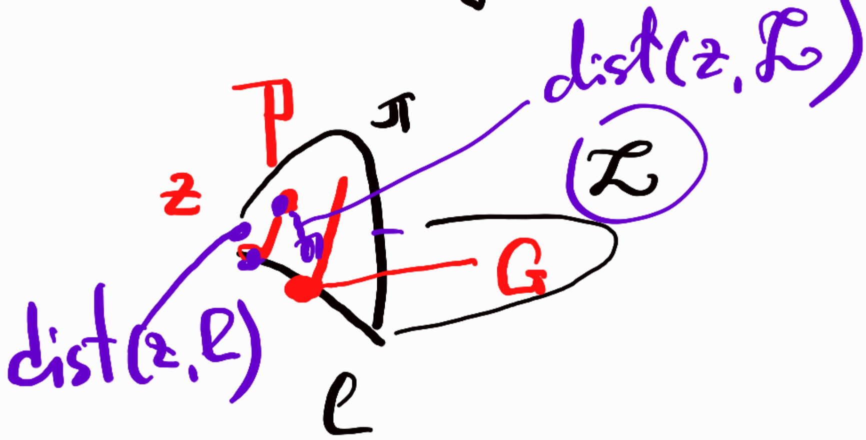
$$n \leq m$$

$$\|\Theta x_\nu\| \cdot |x_{\nu+1}| \le 1$$

Докажем

$$\lim_{\nu\to\infty} \|\Theta x_\nu\| \cdot |x_{\nu+1}| = \infty$$

противоречие.



$\pi \cap \mathcal{L} = \ell$

одномерное подпр.

$P = \pi \cap \ell^\perp$

$\mathcal{L} = \mathcal{L} \cap \ell^\perp$

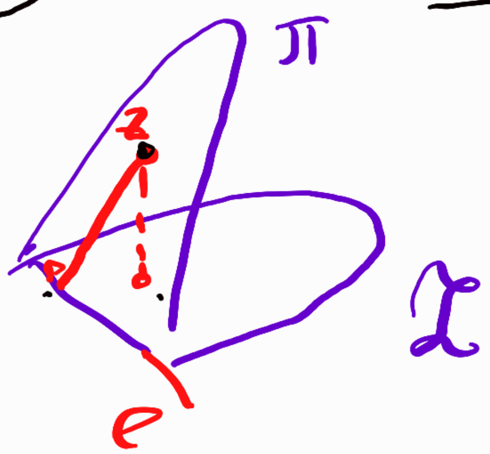
$\ell^\perp$ - орт. доп. до ℓ в $\mathbb{R}^d$.

$$\min_{\substack{z' \in P \\ z'' \in \mathcal{L}}} \widehat{(z', z'')} = \delta > 0$$

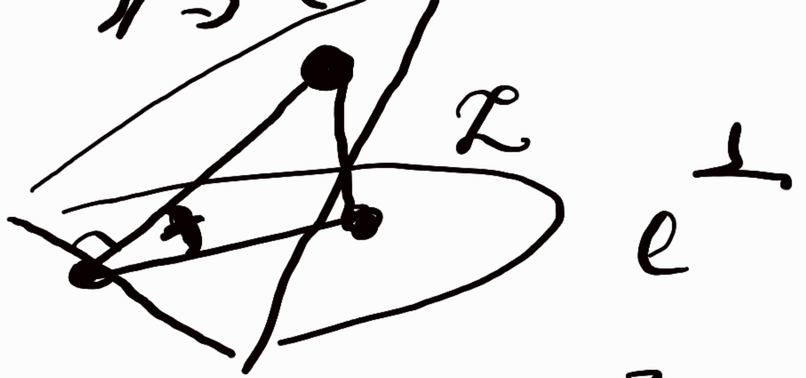
Пусть $z \in \pi$

$$\text{dist}(z, \ell) \le \frac{\text{dist}(z, \mathcal{L})}{\sin \delta}$$

Вопрос: можно ли здесь неравенство заменить на равенство



$$\text{dist}(z, \mathcal{L})$$



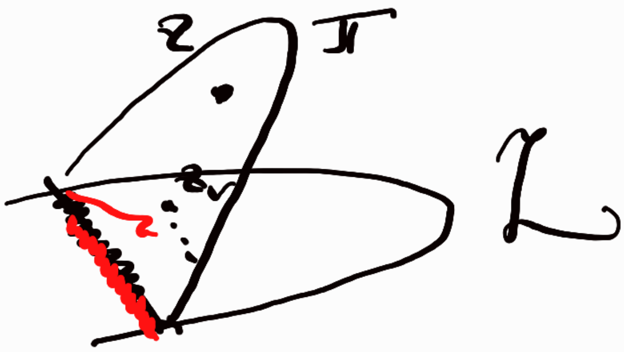
$y_j = \vec{\Theta}_j \vec{x}$

$\mathcal{L}$

$y = \Theta x$

$$\mathrm{dist}(z, \mathcal{L}) \le C\,|\Theta x - y|.$$

не зависит от z $\qquad \mathcal{L}$

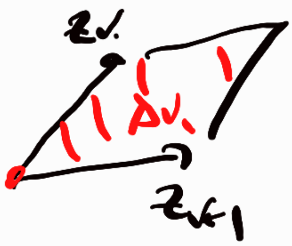


$$\mathrm{dist}(z, \ell) \le C\,|\Theta x - y|$$

$\mathcal{L}, P$

Цель: $\mathrm{dist}(z_\nu, \ell) \to 0$, $\nu \to \infty$

Рассмотрим



$$\pi_\nu = \langle z_\nu, z_{\nu+1} \rangle_{\mathbb{R}}$$

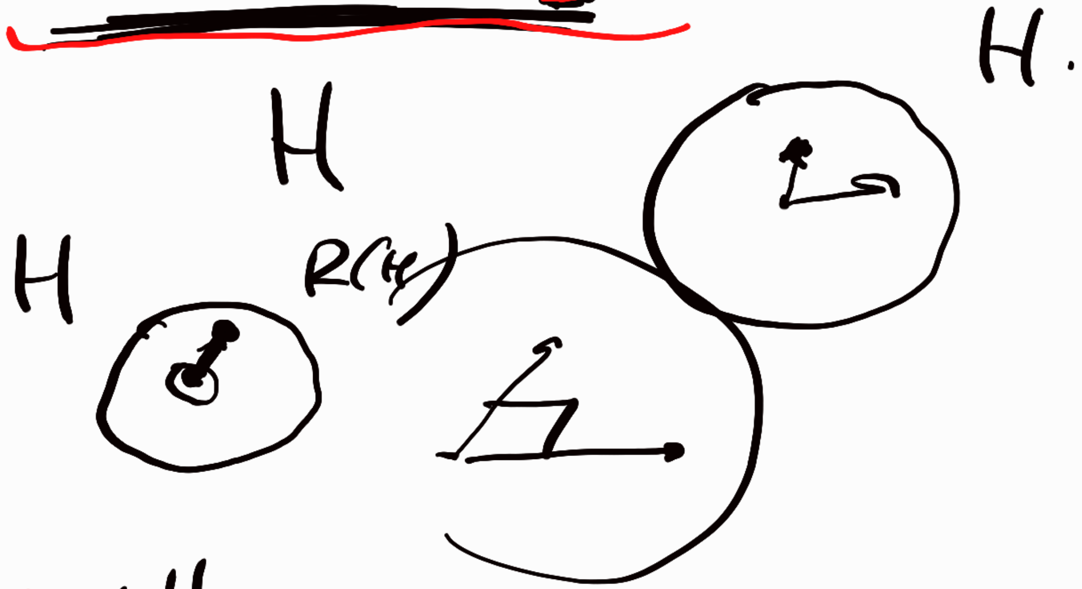
$$\Lambda_\nu = \langle z_\nu, z_{\nu+1} \rangle_{\mathbb{Z}} < \pi_\nu$$

$\Delta_\nu = \det \Lambda_\nu$

Упр $\Delta_\nu \to \infty$, $\nu \to \infty$

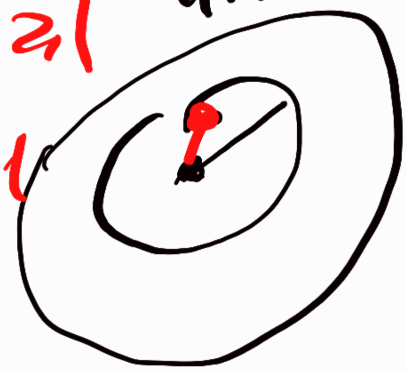
$\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ вещр реш.

$\#\{\Lambda : \det \le H\} < \infty$



$|z| \geq 1$

$\lambda_1 \lambda_2 \lesssim 1$



$\dim \Omega = 2$

$\mathrm{Vol}\,\Omega > 2^2 \det \Lambda$

Теор Минковского о послед. минимумах.

Λ

$\lambda_j(\Omega, \Lambda) := \inf\{t :$ $t\Omega \cap \Lambda$ имеет j лин нез. точек$\}$

$d = 1$

$\lambda_1 \dots \lambda_d \cdot \mathrm{Vol}\,\Omega \asymp_d \det \Lambda$

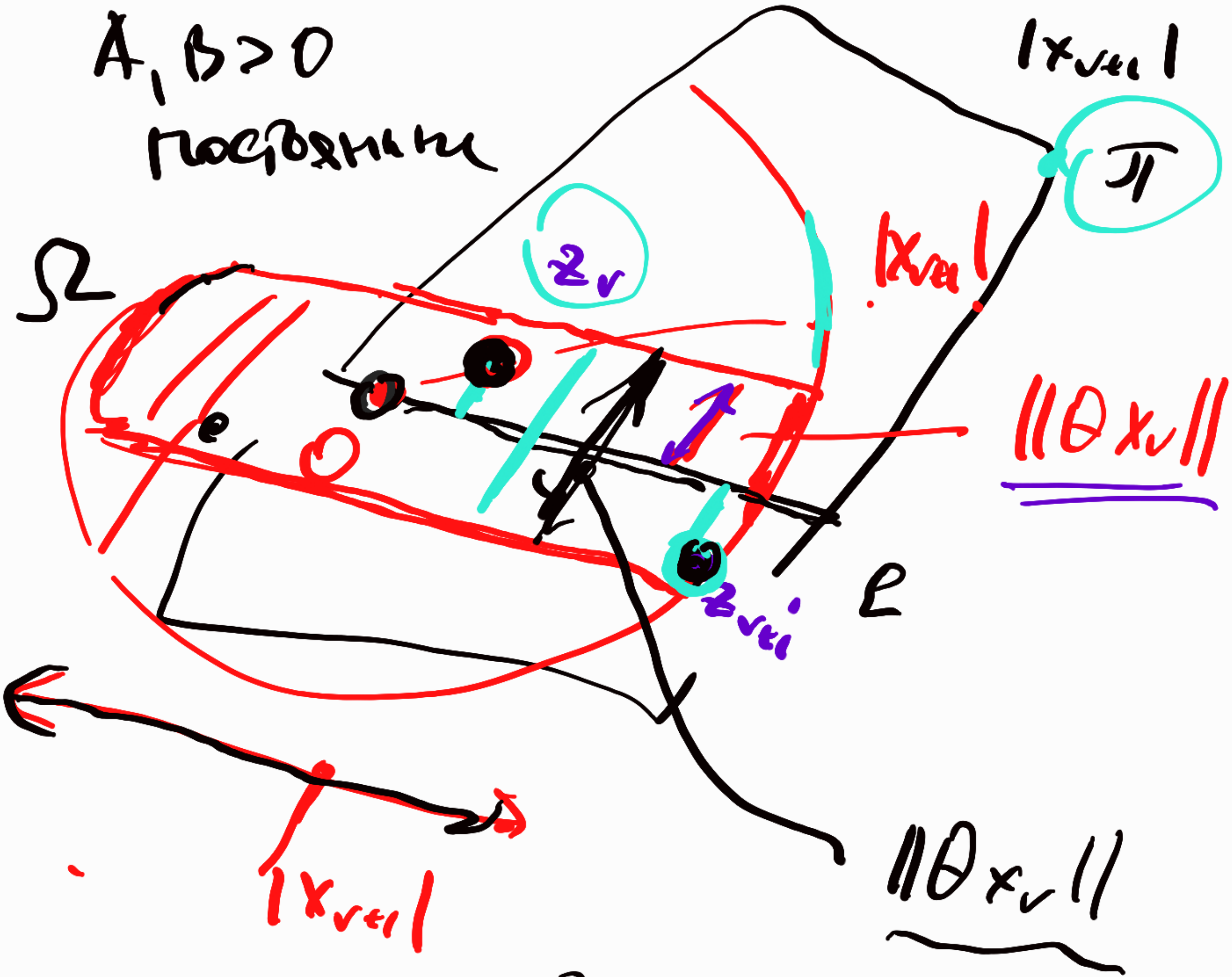
$\lambda_1 \geq 1 \qquad \lambda_2 \leq$

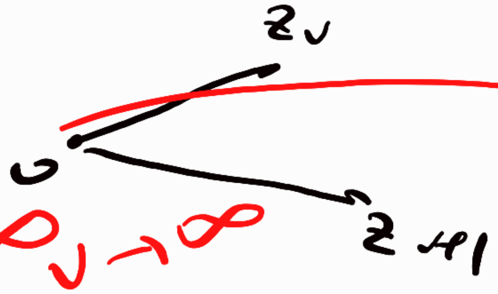
$y \approx \theta f + \dots$

$|x_v| < |x_{v+1}| \qquad \|\theta x_{v+1}\| < \|\theta x_v\|$

$$\Omega = \left\{ z \in \pi \;\; \begin{array}{l} |z| \leq A|x_{v+1}| \\ \mathrm{dist}(z, \ell) \leq B\, \|\theta x_v\| \end{array} \right\}$$

$A, B > 0$
постоянные





$\to \infty, \; v \to \infty$

$$\Delta_v \leq \text{площадь}\,(\Omega \cap \pi_v) \ll |x_{v+1}| \cdot \|\theta x_v\| \leq 1$$

противоречие

$$z_v = (x_v, y_v)$$

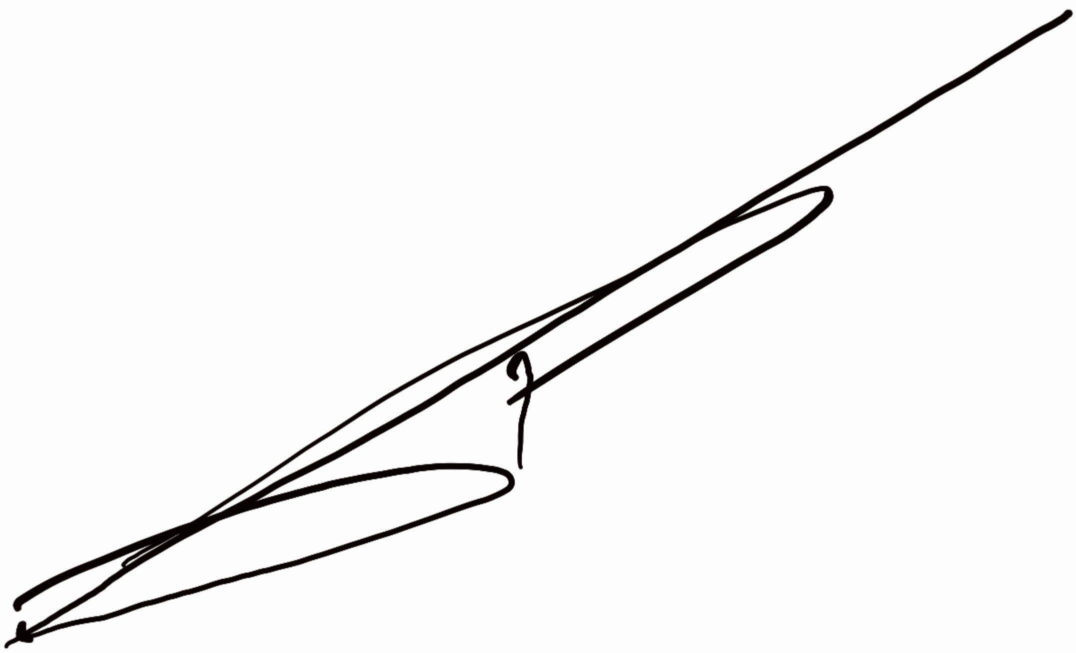
$$\|y_v - \theta x_v\| \le 1$$

$$|y_v| \le |\theta x_v| + 1$$

$$|z_v| \le c\,|x_v| < c\,|x_{v+1}|$$

$$|z_{v+1}| \le c\,|x_{v+1}|$$

$m = 1$



$n = 1$ $\quad$ $m \geq 2$