Вопросы и задачи спецкурса "Диофантовы приближения"
к занятиям 18 марта 2023

А. Наилучшие приближения.

1. Привести пример матрицы

$$\Theta = \begin{pmatrix} \theta_{1,1} & \dots & \theta_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \theta_{n,1} & \dots & \theta_{n,m} \end{pmatrix}$$

для которой $\psi_\Theta(t) > 0$ для всех t, но которая не является "хорошей", то есть, векторы наилучших приближений $\boldsymbol{z}_\nu \in \mathbb{Z}^{m+n}, \nu = 1, 2, 3, \dots$ не определены однозначно.
2. Доказать, что для "хорошей" матрицы Θ для любого ν пара векторов последовательных наилучших приближений $(\boldsymbol{z}_\nu, \boldsymbol{z}_{\nu+1})$ примитивна, то есть дополняется до базиса решетки $\mathbb{Z}^{n+m}$.
3. Доказать, что при $m = 1$ величина

$$R(\Theta) = \min\{s : \ \forall \nu_0 \ \exists \nu_1, \dots, \nu_s > \nu_0 \ \text{ такие что векторы } \boldsymbol{z}_{\nu_1}, \dots, \boldsymbol{z}_{\nu_s} \text{линейно независимы}\}$$

равна максимальному количеству линейно независимых над $\mathbb{Q}$ чисел среди набора $1, \theta_{1,1}, \dots, \theta_{n,1}$.
4. Доказать, что для произвольных m, n для "хорошей" матрицы Θ последовательность наилучших приближений растет экспоненциально, то есть

$$\liminf_{\nu \to \infty} |\boldsymbol{z}_\nu|^{1/\nu} > 1$$

(здесь $|\cdot|$ - евклидова норма в $\mathbb{R}^{m+n}$). Эту задачу можно решить отдельно для случаев $m = 1$ и $n = 1$. Какое минимальное значение нижнего предела для случая $m = n = 1$?

Б. Диофантовы экспоненты.

1. Какие значения могут принимать величины $\omega(\Theta)$ и $\hat{\omega}(\Theta)$ при $m = n = 1$?
2. Доказать, что при $m = 1$ для любого Θ выполнено $\frac{1}{n} \le \hat{\omega}(\Theta) \le 1$.
3. Пусть $n = 1$ и числа $1, \theta_{1,1}, \dots, \theta_{1,m}$ образуют базис вещественного алгебраического поля степени $m + 1$. Чему равны величины $\omega(\Theta)$ и $\hat{\omega}(\Theta)$? Указание: ответ следует из задачи из одного из прошлых листочков.
4. Чему равны величины $\omega(\Theta)$ и $\hat{\omega}(\Theta)$ при $m + n \ge 3$ для почти всех матриц Θ в смысле меры Лебега в $\mathbb{R}^{mn}$? Указание: применить лемму Бореля-Кантелли.
5. Доказать следующее утверждение для произвольных значений размерностей m, n. Предположим, что матрица Θ такова , что существует бесконечно много значений ν, таких что $m + n$ последовательных векторов наилучших приближений

$$\boldsymbol{z}_\nu, \boldsymbol{z}_{\nu+1}, \dots, \boldsymbol{z}_{\nu+m+n-1}$$

линейно независимы. Пусть $G = G(\Theta) \ge 1$ корень уравнения

$$-\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\hat{\omega}(\Theta)}{x^j} + 1 - \hat{\omega}(\Theta) + \sum_{j=1}^{m-1} x^j = 0.$$

Доказать, что $\frac{\omega(\Theta)}{\hat{\omega}(\Theta)} \ge G$.

6. В случае $m=1, n=2$ доказать, что
а) для любого $\hat{\omega} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ найдется $\Theta = \begin{pmatrix} \theta_{1,1} \\ \theta_{2,1} \end{pmatrix}$, такое что $\hat{\omega} = \hat{\omega}(\Theta)$;
б) для любой пары $(\hat{\omega}, \omega)$ с условиями $\hat{\omega} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \omega \geq \hat{\omega} \cdot \frac{\hat{\omega}}{1-\hat{\omega}}$ найдется $\Theta = \begin{pmatrix} \theta_{1,1} \\ \theta_{2,1} \end{pmatrix}$, такое что $\hat{\omega} = \hat{\omega}(\Theta), \omega = \omega(\Theta)$.