Вопросы и задачи спецкурса "Диофантовы приближения" к занятиям 04 и 11 марта 2023

А. Преобразование Гаусса.

Мы рассматриваем преобразование Гаусса

$$T(x) : [0,1] \to [0,1], \quad T(x) = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{x} \right\}, & \text{при } x \neq 0 \\ 0, & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

и его естественное расширение

$$T(x,y) : [0,1]^2 \to [0,1]^2, \quad T(x,y) = \begin{cases} \left(\left\{ \frac{1}{x} \right\}, \frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right] + y} \right) & \text{при } x \neq 0, \\ (0, y) & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

1. Что представляет из себя полный прообраз точки x - множество $T^{1}(x)$?
2. Доказать, что преобразование Гаусса $T(x)$ сохраняет меру Гаусса

$$\mu(A) = \frac{1}{\log 2} \int_A \frac{dx}{1+x},$$

то есть $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$.
3. Доказать, что $T(x,y) : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ есть биекция на единичном квадрате.
4. Доказать, что $T(x,y)$ сохраняет меру

$$\mu(A) = \frac{1}{\log 2} \int \int_A \frac{dxdy}{(1+xy)^2}.$$

5. Доказать, с помощью естественного расширения преобразование Гаусса теоремы
а) Бореля: $\forall \nu \ \exists j \in \{\nu - 1, \nu, \nu + 1\}$ такое что $q_j ||q_j \alpha|| < \frac{1}{\sqrt{5}}$;
б) Моримото: $\forall \nu \ \exists j \in \{\nu - 1, \nu, \nu + 1\}$ такое что $q_{j+1} ||q_j \alpha|| > \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}$.

Б. Спектр Дирихле.

Мы рассматриваем числа

$$\omega_0 = [\overline{1}]; \quad \omega_k = [\overline{\underbrace{1, 1, ..., 1}_{2k-1} 2}], k = 1, 2, 3, \ldots .$$

1. Найти минимальные многочлены для всех чисел ω_k.
2. Найти минимальные многочлены для всех чисел $d(\omega_k)$.

Вместо постоянных Дирихле

$$d(\alpha) = \limsup_{t \to \infty} t \cdot \psi_\alpha(t) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \alpha_n^* / \alpha_{n+1}}$$

удобно рассматривать величины

$$\omega(\alpha) = \limsup_{k \to \infty} \alpha_{n+1} / \alpha_n^* = \frac{d(\alpha)}{1 - d(\alpha)}.$$

3. **Теорема о дискретной части спектра Дирихле** (Morimoto, Lesca). *Если* $\omega(\alpha) < \omega_* = 2 + \sqrt{5}$, *то* $\alpha \sim \omega_n$ *при некотором* n.

Схема доказательства теоремы. Надо разобрать следующие случай и в каждом из них доказать, что $\omega(\alpha) > \omega_*$:

1^0 у α бесконечно много неполных частных не меньших 3;

2^0 у α бесконечно много подряд идущих пар неполных частных 2,2;

3^0 α имеет вид

$$\alpha[...2, \underbrace{1, ..., 1}_{r_i}, 2, \underbrace{1, ..., 1}_{r_{i+1}}, 2, \underbrace{1, ..., 1}_{r_{i+2}}, 2, ...] \qquad (1)$$

и имеется бесконечно большие r_i различной четности;

4^0 в разложении (1) все достаточно большие r_i четные и среди них бесконечно много различных;

5^0 в разложении (1) все достаточно большие r_i нечетные и среди них бесконечно много различных;

6^0 в разложении (1) все достаточно большие r_i четные и, начиная с какого-то момента, они все совпадают.

4 а. Верно ли, что $\frac{1}{1+\omega_*^{-1}}$ является точкой накопления в спектре $\mathbb{D}$?

5. Доказать, что при некотором $d_* < 1$ выполнено $[d_*, 1] \in \mathbb{D}$.