

## Экспоненциальное отображение

**Задача 1.** Рассмотрим подгруппу в  $GL(n, \mathbb{R})$  матриц с положительным определителем. Доказать, что это компонента связности единицы группы  $GL(n, \mathbb{R})$ .

**Задача 2.** Посчитать экспоненты  $e^A$  для

а)  $A = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ ;

б)  $A$  = жорданов блок размера  $n$  с собственным значением  $0$ ;

в)  $A = t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ;

г)  $A$  = жорданов блок размера  $n$  с собственным значением  $\lambda$ .

**Задача 3.** а) Докажите, что для группы Ли  $SL_2(\mathbb{R})$  экспоненциальное отображение не сюръективно.

б) Опишите его образ.

**Задача 4.** Докажите, что отображение  $\exp: \mathfrak{g}(n, \mathbb{C}) \mapsto GL(n, \mathbb{C})$  сюръективно. Инъективно ли оно?

**Задача 5.** Рассмотрим вектор-столбец  $x \in \mathbb{R}^3$  и построенную по нему матрицу

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x^t \\ x & 0 \end{pmatrix} \in L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4).$$

Выписать явную формулу  $e^{sX}$  (с применением гиперболических синуса и косинуса).

**Задача 6.** \* Докажите, что если  $G$  – связная коммутативная группа Ли, то  $\exp \mathfrak{g} = G$ .

Задачи можно сдавать:

Каринэ Куюмжиян [karina@mscme.ru](mailto:karina@mscme.ru) по понедельникам с 19.20 до 20.50 в НМУ

Борис Билич - онлайн (договариваться через телеграм)

Илья Левин - онлайн (договариваться через телеграм)