Классические алгебры Ли

Рассмотрим следующие классические группы Ли над $\mathbb{C}$:

Задача 1. $SL(n+1,\mathbb{C}) = \{A \in L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n+1},\mathbb{C}^{n+1}) \mid \det A = 1\}$;

Задача 2. $SO(2n+1,\mathbb{C}) = \{A \in SL(2n+1,\mathbb{C} \mid A^tA = I)\}$.

Задача 3. Пусть J – невырожденная кососимметрическая билинейная форма, например, $J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$.

$$Sp(n,\mathbb{C}) = \{A \in GL(2n,\mathbb{C}) \mid A^tJ_nA = J_n\}.$$

Задача 4. $SO(2n,\mathbb{C}) = \{A \in SL(2n,\mathbb{C} \mid A^tA = I)\}$.

a) Проверьте, что они действительно являются группами Ли.

b) Докажите, что соответствующие комплексные классические алгебры Ли задаются следующим образом:

Задача 1. $A_n = \mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C}) = X \in L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{n+1},\mathbb{C}^{n+1}) \mid \operatorname{tr} X = 0\}$;

Задача 2. $B_n = \mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C}) = X \in L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n+1},\mathbb{C}^{2n+1}) \mid X^t + X = 0\}$;

Задача 3. $C_n = \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & -X_1^t \end{pmatrix} \mid X_i \in L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}^n), X_2^t = X_2, X_3^t = X_3 \right\}$;

Задача 4. $D_n = \mathfrak{so}(2n,\mathbb{C}) = X \in L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{2n},\mathbb{C}^{2n}) \mid X^t + X = 0\}$

Подсказка. *Проверьте, что указанные алгебры Ли замкнуты относительно скобки Ли, а также что они сохраняются при действии сопряжениями элементами соответствующих групп Ли. Сюръективность доказывать в лоб не рекомендуется.*

Соответствующие компактные классические группы Ли:

Задача 5. $SU(n+1)$,

Задача 6. $SO(2n+1)$,

Задача 7. $Sp(n) = \{A \in U(2n) \mid A^tJ_nA = J_n\}$,

Задача 8. $SO(2n)$.

Докажите, что они являются (вещественно-аналитическими) группами Ли, и постройте соответствующие алгебры Ли.

Задача 9. Классификация двумерных алгебр Ли. Пусть основное поле $\Bbbk = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Докажите, что любая алгебра Ли над k размерности 2 (размерность как векторного пространства) либо абелева (т.е. скобка Ли нулевая), либо обладает таким базисом $\{X,Y\}$, что $[X,Y] = X$.

Задача 10. Рассмотрим касательную алгебру к следующей группе Ли:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R},\ a > 0 \right\}.$$

Докажите, что это алгебра Ли размерности 2. Абелева ли она? Если нет, найдите в ней представителей, как в предыдущей задаче.

Задачи можно сдавать:

Каринэ Куюмжиян `karina@mccme.ru` по понедельникам с 19.20 до 20.50 в НМУ

Борис Билич - онлайн (договариваться через телеграм)

Илья Левин - онлайн (договариваться через телеграм)