НМУ, Алгебра-2
Листок 4. 13.03.2023

Задача 1.
Пусть $K \subset \mathbb{R}$ — поле. Докажите, что если отрезок длины α можно построить при помощи циркуля и линейки из отрезков, длины которых лежат в K, то $[K(\alpha) : K]$ — степень двойки.

Задача 2.
Найдите минимальные полиномы чисел $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ и $\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$ и докажите, что задача о трисекции угла при помощи циркуля и линейки неразрешима.[1]

Задача 3.
Пусть $E \subset F \subset K$ — поля, $[K : E] < \infty$.

а) Докажите, что если K/E нормально, то и K/F нормально.

б) Верно ли, что если K/F нормально и F/E нормально, то K/E также нормально?

Задача 4.
Для каких простых чисел p многочлен $f(x) = x^5 + x + 1 \in \mathbb{F}_p[x]$ несепарабелен? Для каждого такого p найдите $(f(x), f'(x))$.

Задача 5.
Пусть $F \subset L$ — бесконечные поля, $a, b \in L$ таковы, что существует лишь конечное число различных полей K таких, что $F \subset K \subset F(a, b)$. Докажите, что существует $c \in L$ такое, что $F(a, b) = F(c)$.

Задача 6.
Пусть F — поле, $F(\alpha)$ — его конечное расширение. Докажите, что существует лишь конечное число различных промежуточных полей $F \subset K \subset F(\alpha)$. *Указание:* Для каждого такого K рассмотрите $f_K(x)$ — минимальный многочлен α над K. Для каких K_1, K_2 выполнено $f_{K_1}(x) \in K_2[x]$?

Задача 7.
Пусть p — простое число. Предъявив бесконечное число промежуточных расширений, покажите, что в поле $\mathbb{F}_p(x, y)$ нет такого элемента z, что $\mathbb{F}_p(x^p, y^p, z) = \mathbb{F}_p(x, y)$.

Задача 8.
Пусть $p_1, \ldots, p_n$ — различные простые числа. Найдите степень $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_n})$ над $\mathbb{Q}$.

[1] То же касается и задачи об удвоении куба.