

НМУ, Алгебра-2
Экзамен. 21.05.2023

Задача 1. Вычислите группу Галуа поля разложения многочлена $x^6 + 3$ над \mathbb{Q} .

Задача 2. Для каких $a \in \mathbb{C}$ целозамкнуто кольцо

$$\mathbb{C}[x, \sqrt{x^3 - 3x + 2 + a}] = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3 + 3x - 2 - a)?$$

Задача 3. Пусть $K \neq \mathbb{Q}$ — числовое поле, p — рациональное простое число и $R = p\mathcal{O}_K + \mathbb{Z}$. Для любого ли идеала $I \subset R$ выполнено $N(I^2) = (N(I))^2$? Здесь норма $N(J)$ идеала J — это число элементов в кольце R/J .

Задача 4. Пусть L/K — конечное расширение Галуа. Введем на векторном пространстве $L \otimes_K L$ структуру кольца при помощи формулы $(x \otimes y) \cdot (z \otimes t) = xz \otimes yt$, продолженной по линейности. Пусть \mathfrak{m} — максимальный идеал получившегося кольца. Докажите, что $L \otimes_K L/\mathfrak{m} \simeq L$.

Задача 5.

- а) Докажите, что для любого n существует расширение K/\mathbb{Q} с группой Галуа S_n .
- б) Докажите, что для любого n существует расширение K/\mathbb{Q} с группой Галуа $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^n$.

Задача 6.

Опишите все автоморфизмы $\mathbb{Q}_5(\sqrt{5})$ как поля (т.е. не обязательно сохраняющие \mathbb{Q}_5).