

**НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 3.**  
**Поверхности в  $n$ -мерном евклидовом**  
**пространстве. 28.02.2023.**

**Задача 1.** Докажите формулу

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2}(\partial_X \langle Y, Z \rangle + \partial_Y \langle Z, X \rangle - \partial_Z \langle X, Y \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle),$$

не используя координат векторных полей и символов Кристоффеля.

**Задача 2.** Найти в частном случае  $k = 2$ ,  $n = 3$  дериационные формулы Гаусса-Вейнгартена, если выбрать базис в касательных векторных полях  $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$  и базис  $\mathbf{m}$  в нормальных векторных полях.

**Задача 3.** Написать уравнение Гаусса  $d\Gamma_j^i + \Gamma_l^i \wedge \Gamma_j^l = b_m^\nu g_{\mu\nu} g^{mi} \wedge b_j^\mu$  в терминах  $\Gamma_{ij}^l$  и  $b_{ij}^\mu$ . Написать его в частном случае двумерной поверхности в  $\mathbb{E}^3$ .

**Задача 4.** Вывести соотношение между  $db, b, \Gamma$  и  $K$  (уравнение Петерсона-Кодацци) по аналогии с уравнением Гаусса  $d\Gamma + \Gamma \wedge \Gamma = b_\mu \wedge b^\mu$ , связывающим  $d\Gamma, \Gamma$  и  $b$ . Доказать, что в случае гиперповерхности если взять единичное поле нормалей в качестве базиса в нормальных векторных полях, то уравнение Петерсона-Кодацци не содержит  $K$ . Записать уравнение Петерсона-Кодацци в терминах  $\Gamma_{ij}^l, b_{ij}^\mu, K_{i,\nu}^\mu$  в частном случае двумерной поверхности в  $\mathbb{E}^3$ .

**Задача 5.** Выписать формулу преобразования символов Кристоффеля  $\tilde{\Gamma} = T^{-1} \cdot \Gamma \cdot T + T^{-1} \cdot dT$  в терминах  $\Gamma_{ij}^l$  и  $\tilde{\Gamma}_{ij}^l$ .

**Задача 6.** Придумать аналог нормали средней кривизны для  $k$ -поверхности в  $\mathbb{E}^n$ . Естественно, при  $k = 2$ ,  $n = 3$  результат должен совпадать с классическим определением (и это надо проверить). *Указание: используйте линейный функционал  $\xi \mapsto \text{tr } W_\xi$  на пространстве  $N_{AM}$ .*

**Задача 7.** Рассмотрим кривую в  $\mathbb{E}^n$ . Легко видеть, что любое базисное касательное векторное поле  $e_1$  можно рассматривать как вектор скорости для некоторой параметризации. Пусть  $t$  такой параметр. Доказать, что кривизна кривой может быть найдена по формуле

$$k = \sqrt{\left(\frac{b_{11}^1}{g_{11}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{b_{11}^{n-1}}{g_{11}}\right)^2}.$$

**Задача 8.** В условиях предыдущей задачи доказать, что  $\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \ln g_{11}$ .

**Задача 9.** Найти связность в касательном расслоении, вторую квадратичную форму и оператор Вейнгартена для прямого кругового цилиндра в  $\mathbb{E}^3$ .

**Задача 10\*.** Доказать первое структурное уравнение Картана

$$de^\alpha = e^\beta \wedge \Gamma_{\beta}^\alpha,$$

где  $e^\alpha$  — базис, дуальный к выбранному базису  $e_\alpha$  пространства касательных векторных полей.