Теория деформаций

Лекция 3

Это записки лекций по теории деформаций в НМУ в весеннем семестре 2022 года. Со всеми вопросами, предложениями, найденными опечатками и ошибками пишите мне, Грише Папаянову, на почту `grisha@math.northwestern.edu` или в дискорд `https : //discord.gg/7jKHBTdrbH`.

Мы изучаем коалгебры. Коалгебры у нас появились уже в двух ипостасях — как двойственные к артиновым алгебрам и как коалгебры Шевалле-Эйленберга для L^∞-алгебр. На самом деле в обоих этих случаях встречающиеся коалгебры конильпотентны. Поэтому мы изучаем конильпотентные коалгебры.

Напомним, что у нас есть тензорная коалгебра TV с коумножением

$$\Delta(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) := \sum_{i=0}^{n} (x_1 \otimes \cdots \otimes x_i) \otimes (x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_n). \tag{1}$$

На ней действуют симметрические группы по формуле $\sigma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = (-1)^{sign}(x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(n)}$ и пространство инвариантов это подкоалгебра относительно тензорного коумножения. Обозначим $\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) := x_1 \odot \cdots \odot x_n := \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \sigma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)$. Эти симметрические тензоры образуют базис симметрической коалгебры. Коумножение в этом базисе выглядит так:

$$\Delta(x_1 \odot \cdots \odot x_n) = \sum_{I \subset [1..n]} (-1)^{sign} x_I \otimes x_{I^c}, \tag{2}$$

где $x_I = \bigodot_{i \in I} x_{(i)}$, и знак берётся из соотношения $x_I \odot x_{I^c} = x_{[1..n]}$.

Мы хотим показать, что TV и SV это свободные коаугментированные конильпотентные коалгебры, либо, что равносильно, что $T^{>0}(V)$ и $S^{>0}(V)$ это свободные конильпотентные коалгебры; одна просто коассоциативная, вторая просто кокоммутативная. Дуализируя свойство свободной алгебры (морфизм из неё в любую другую достаточно задать только на образующих), напишем следующие формулы. Для начала, обозначим проекции $TV \longrightarrow V$ и $SV \longrightarrow V$ буквой p. Это не должно вызвать путаницы.

Пусть $\mathfrak{c}$ это произвольная коассоциативная конильпотентная коалгебра и пусть $\mathfrak{s}$ это произвольная коассоциативная кокоммутативная конильпотентная коалгебра. Мы можем считать их градуированными. Пусть $f : \mathfrak{c} \longrightarrow V$ и $g : \mathfrak{s} \longrightarrow V$ это произвольные морфизмы. Тогда существуют и единственные морфизмы коалгебр

$F : \mathfrak{c} \longrightarrow TV$ и $G : \mathfrak{s} \longrightarrow SV$ такие, что $pF = f$ и $pG = G$. Мы будем говорить, что f и g это **ряды Тейлора** для F и G.

Чтобы это доказать, мы будем использовать так называемое комонадное свойство коалгебр. Напомним, что в силу коассоциативности операция итерированного коумножения $\Delta^n : C \longrightarrow C^{\otimes n}$ хорошо определена в том смысле, что она не зависит от порядка разумножения сомножителей. Более того, для любых p, q отображения Δ^{p+q+1} и $(\Delta^p \otimes \Delta^q)\Delta$, бьющие из C в C^{p+q+2}, равны. Определим для конильпотентной коалгебры C без коединицы отображение $\frac{1}{1-\Delta} : C \longrightarrow T^{>0}C$, заданное рядом $c \mapsto \sum \Delta^i(c)$. В силу конильпотентности, этот ряд является многочленом. Комонадное свойство $T^{>0}$ состоит в том, что $\frac{1}{1-\Delta}$ является морфизмом коалгебр.

Для работы с коалгебрами хорошей нотации, кажется, ещё не придумали. Лучшее, что есть — это так называемые **обозначения Свидлера**, когда $\Delta(x) = \sum_i x_i^{(1)} \otimes x_i^{(2)}$ записывается как $\sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ или попросту как $x_{(1)} \otimes x_{(2)}$. Коссоциативность тогда можно записать как $\Delta x_{(1)} \otimes x_{(2)} = x_{(1)} \otimes \Delta x_{(2)} = x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(3)}$. Кокоммутативность — как $x_{(1)} \otimes x_{(2)} = \pm x_{(2)} \otimes x_{(1)}$.

Докажем комонадное свойство. Морфизм коалгебр $F : C \longrightarrow D$ это линейное отображение такое, что $\Delta_D F = (F \otimes F)\Delta_C$. Покажем это равенство для $\frac{1}{1-\Delta}$. Компонента в $\oplus_{p+q=n} T^pC \otimes T^qC$ у элемента $\Delta_{TC}\frac{1}{1-\Delta}c$ равна $\Delta(\Delta^{n-1}c)$. С другой стороны, компонента там же у элемента $(\frac{1}{1-\Delta} \otimes \frac{1}{1-\Delta})\Delta_C$ равна $\sum(\Delta^{p-1} \otimes \Delta^{q-1})(\Delta(c))$, и две части равенства равны в силу коассоциативности.

Нам понадобится аналогичное свойство коалгебры $S^{\geq}V$. В коммутативной ситуации возникает коэффициент-факториал. Определим для любой кокоммутативной конильпотетной коалгебры без коединицы C отображение $\delta^n : C \longrightarrow S^nC$ по формуле $\delta^{n+1}(x) := \frac{1}{(n+1)!}\pi(\Delta^n(x))$. Обозначим через $E(x)$ сумму $\sum_{n\geq 1} \delta^n(x)$. Проверим, что E это морфизм коалгебр. С одной стороны, $\Delta_S(E(x)) = \Delta_S \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} x_{(1)} \odot \cdots \odot x_{(n)} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{I\subset[1..n]} (-1)^{sign} x_I \otimes x_{I^c}$. Из кокоммутативности следует, что слагаемые, соответствующие подмножествам одинаковой мощности, равны. Суммируя по ним, получаем, что эта сумма равна $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{i\in[1..n-1]} \binom{n}{i} x_{(1)} \odot \cdots \odot x_{(i)} \otimes x_{(i+1)} \odot \cdots \odot x_{(n)}$. (Заметьте, что все знаки сокращаются). С другой стороны, $(E \otimes E)(x_{(1)} \otimes x_{(2)}) == \sum_{i,j\geq 1} \frac{\pi\otimes\pi}{i!j!} \Delta^{i-1} x_{(1)} \otimes \Delta^{j-1} x_{(2)}$. Группируя по $i + j = n$, получаем сумму $\sum_{n\geq 1} \sum_{i\in[1..n]} \frac{\pi\otimes\pi}{i!(n-i)!} (x_{(1)} \otimes \cdots \otimes x_{(i)}) \otimes (x_{(i+1)} \otimes \cdots \otimes x_{(n)})$, что после применения $\pi \otimes \pi$ получается равно $\sum_{n\geq 1} \sum_{i\in[1..n]} \frac{1}{i!(n-i)!} (x_{(1)} \odot \cdots \odot x_{(i)}) \otimes (x_{(i+1)} \odot \cdots \odot x_{(n)})$. Обе части равенства совпадают.

Существование универсальных морфизмов F и G теперь доказано — их можно построить как композицию комонадного отображения и тензорной (симметрической, соответственно) степени f (g). Единственность следует из следующего наблюдения.

Конильпотентная коалгебра C **копорождается** линейным морфизмом $p : C \longrightarrow V$, если построенное выше отображение $C \longrightarrow TV$ — вложение. (Понятно, что есть и кокоммутативный вариант определения). Два морфизма коалгебр $f_1, f_2 : D \longrightarrow C$, таких, что $pf_1 = pf_2$, совпадают — гомоморфизм коалгебр задаётся своими козначениями на копорождающих. Единственность теперь следует из того, что проекция на линейную компоненту копорождает и $T^{\geq 1}$, и $S^{\geq 1}$ — соответствующие морфизмы будут, соответственно, тождественным отображением и вложением симметрических инвариантов.

Кодифференцированием коалгебры C степени i называют такое отображение $D \in \mathrm{Hom}^i(C, C)$, что $\Delta D = (D \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes D)\Delta$.

Упражнение 1: Проверьте, что градуированный коммутатор двух кодифференцирований это кодифференцирование.

Кодифференцирование коалгебры ли тоже задаётся своими значениями на кообразующих. Более того, для коалгебр $T^{>0}V$ и $S^{>0}V$ оно задаётся значениями на V единственным образом. Чтобы вывести это универсальное свойство из того, которое мы уже доказали, можно показать, что кодифференцирования в точности автоморфизмы тривиальной деформации над $k[h]/h^2$: кодифференцирования любой коалгебры C это всё равно что $k[h]/h^2$-линейные автоморфизмы $k[h]/h^2$-коалгебры $C \otimes k[h]/h^2$, которые тождественны по модулю h, и заметить, что доказательства комонадных свойств проходят не только для векторных пространств, но и для модулей (даже и не обязательно плоских) над любой алгеброй над полем характеристики ноль.

Ясно, что кодифференцирования коалгебр $T^{>0}V$ и $S^{>0}V$ это всё равно что кодифференцирования коалгебр TV и SV, сохраняющие коаугментации. Пусть D это кодифференцирование степени 1. Обозначим его компоненты Тейлора за D_i. Условие на то, что $D^2 = 0$, на уровне компонент Тейлора выглядит так

$$\sum_{k+l=n+1} \sum_{\sigma \in \Sigma(k,n-k)} (-1)^{sign} D_l(D_k(v_{\sigma(1)} \odot \cdots \odot v_{\sigma(k)}) \odot v_{\sigma(k+1)} \odot \cdots \odot v_{\sigma(n)}) = 0 \qquad (3)$$

в симметрическом случае, и вот так

$$\sum_{k+l=n+1} \sum_{i \in [0..n-k]} (-1)^{sign} D_l(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes D_k(v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_{i+k}) \otimes v_{i+k+1} \cdots \otimes v_n) \qquad (4)$$

в несимметрическом. Здесь $\Sigma(k, n-k)$ это множество всех таких перестановок σ из Σ_n, что $\sigma(i) < \sigma(i+1)$, если $i \neq k$. Знак в симметрическом случае это кошулев знак перестановки σ (количество нечётных инверсий), а в несимметрическом это количество нечётных букв слева от D_k.

Пусть L — дг-алгебра Ли. Рассмотрим пространство $L[1]$ и введём там операции $D_1 \in \mathrm{Hom}^1(L[1], L[1])$ и $D_2 \in \mathrm{Hom}^1(S^2(L[1]), L[1])$ по формулам $D_1(sv) := (-1)sdv$ и $D_2(sv \odot sw) := (-1)^{|v|}s[v, w]$. Проверим, что ряд тейлора $D_1 + D_2$ превращает коалгебру $S(L[1])$ в дг-коалгебру. $D_1^2 = 0$ автоматически следует из $d^2 = 0$. Для $n = 2$ получаем условие $D_1(D_2(x \odot y)) + D_2(D_1(x) \odot y) + (-1)^{|x||y|}D_2(D_1(y) \odot x)$, что эквивалентно тождеству Лейбница для d. Для $n = 3$ получаем условие $D_2(D_2(x \odot y) \odot z) + (-1)^{|y||z|}D_2(D_2(x \odot z) \odot y) + (-1)^{|x||y|}(-1)^{|x||z|}D_2(D_2(y \odot z) \odot x)$, что эквивалентно тождеству Якоби. Получившаяся дг-коалгебра обозначается как $C_*(L)$.

Пусть теперь A — ассоциативная дг-алгебра. Рассмотрим пространство $A[1]$ и введём там операции $D_1 \in \mathrm{Hom}^1(A[1], A[1])$ и $D_2 \in \mathrm{Hom}^1(T^2(A[1]), A[1])$ по формулам $D_1(sa) := (-1)sda$ и $D_2(sa \otimes sb) := (-1)^{|a|}s(ab)$. Проверим, что ряд тейлора $D_1 + D_2$ превращает коалгебру $T(A[1])$ в дг-коалгебру. При $n = 1$ и $n = 2$ уравнения получаются такими же, как и в симметрическом случае, а при $n = 3$ равенство $D_2(D_2(sa \otimes sb) \otimes sc) + (-1)^{|sa|}D_2(sa \otimes D_2(sb \otimes sc))$ превращается в $(-1)^{|a|}(-1)^{|ab|}s(ab)c + (-1)^{|sa|}(-1)^{b}(-1)^{|a|}sa(bc)$, зануление чего эквивалентно ассоциативности умножения. Получившуюся дг-коалгебру будем обозначать через $\mathrm{Bar}(A)$.

L^∞-алгебра L это, по определению, кокоммутативная дг-коалгебра $(S(L[1]), D)$, которую мы тоже будем обозначать $C_*(L)$. A^∞-алгебра A это, по определению, дг-коалгебра $(T(A[1]), D)$, которую мы тоже будем обозначать $\mathrm{Bar}(A)$. Морфизмы между бесконечность-алгебрами определяются как морфизмы между соответствующими дг-коалгебрами. По морфизму дг-алгебр ли или ассоциативных дг-алгебр $f : A \longrightarrow B$ можно построить морфизм коалгебр $F : C_*(A) \longrightarrow C_*(B)$ (соответственно, $\mathrm{Bar}(A) \longrightarrow \mathrm{Bar}(B)$), коммутирующий с дифференциалом. Это задаёт вложение категорий обычных алгебр в категорию бесконечность-алгебр. Оно неполное: например, если L это абелева алгебра Ли, сосредоточенная в степени 1, то $C_*(L)$ это свободная кокоммутативная коалгебра, порождённая векторным пространством в степени ноль, без дифференциала. Её автоморфизмы задаются всеми рядами Тейлора, не обязательно линейными.

Упражнение 2: Проверьте, что если A и B это алгебры (ассоциативные или Ли), сосредоточенная в градуировке ноль, то морфизмы $C_*(A) \longrightarrow C_*(B)$ (соответственно $\mathrm{Bar}(A) \longrightarrow \mathrm{Bar}(B)$ это в точности гомоморфизмы алгебр $A \longrightarrow B$.

Под бесконечность-алгеброй мы будем понимать A^∞ или L^∞-алгебру. Поскольку бесконечность-алгебра задаётся рядом Тейлора дифференциала D, про неё можно думать, как про пространство V с набором операций $Q_i : V^{\otimes} \longrightarrow V$, удовлетворяющих набору квадратичных соотношений (которые получаются из соотношения $D^2 = 0$ после подкрутки на надлежащие знаки: нужно применить изоморфизм $(V[1])^{\otimes n} \longrightarrow V^{\otimes n}[n]$.

Коалгебры TV и SV допускают аналоги теорем об обратной функции. А именно, пусть $F : TV \longrightarrow TV$ (или $SV \longrightarrow SV$) это гомоморфизм коалгебр. Обозначим его ряд Тейлора через $f : TV \longrightarrow V$ (соответственно, $SV \longrightarrow V$). Ограничение f на линейные тензоры назовём **производной** f: это отображение $f_1 : V \longrightarrow V$. Теорема об обратной функции утверждает, что если f_1 это изоморфизм векторных пространств, то F это изоморфизм коалгебр.

Докажем это. Предположим, что мы рассматриваем коалгебру TV; случай SV точно такой же. Рассмотрим степенную фильтрацию на тензорной коалгебре: $T^{\leq n}V \subset T^{\leq n+1}V \subset \ldots$. Это возрастающая фильтрация; она исчерпывающая. Рассмотрим отображение $F_1 : TV \longrightarrow TV$ с рядом Тейлора f_1. Заметим, что $F_1 = \operatorname{gr} F$ относительно тензорной фильтрации. Отсюда по индукции следует, что F это изоморфизм на каждом конечном члене фильтрации $T^{\leq n}V$: достаточно рассмотреть короткие точные последовательности вида $0 \longrightarrow T^{\leq n}/T^{\leq n-1} \longrightarrow T^{n+k}/T^{n-1} \longrightarrow T^{n+k}/T^{n} \longrightarrow 0$. Наконец, прямой предел (попросту, объединение) изоморфизмов $F_n : T^{\leq n} \longrightarrow T^{\leq n}$ это изоморфизм — вектор в ядре или вне образа возник бы на конечном шаге.

Обратим внимание, что из формул для ряда Тейлора для уравнения $D^2 = 0$ следует, что $D_1^2 = 0$, где $D_1 : V \longrightarrow V$ это линейная часть отображения D. Отображение F между бесконечность-алгебрами называется квазиизоморфизмом, если его производная f_1 — квазиизоморфизм. Рассуждение, похожее на проведённое выше, показывает, что в этом случае и дг-коалгебры тоже будут квазиизоморфны при помощи F. В самом деле, рассмотрим, как выше, тензорную фильтрацию на TV. Тогда $\operatorname{gr} F$, как выше, это F_1.

Упражнение 3: Покажите, что если $f : V \longrightarrow W$ это квазиизоморфизм векторных пространств над полем (более общо, плоских модулей над коммутативным кольцом), то $f^{\otimes n} : T^n V \longrightarrow T^n W$ это тоже квазиизоморфизм. Покажите, что если поле было характеристики ноль, то $S^n f : S^n V \longrightarrow S^n W$ это квазиизоморфизм. Приведите контрпример в положительной характеристике.

Утверждение, что $F : TV \longrightarrow TW$ (или $SV \longrightarrow SW$) это квазиизоморфизм, следует теперь из того, что отображение комплексов, сохраняющих исчёрпывающую возрастающую фильтрацию, ограниченную снизу, квазиизоморфизм, если оно квазиизоморфизм на gr. Это можно доказать либо с помощью спектральных последовательностей, либо по индукции, рассматривая тензорные фильтрации, как выше, и ассоциированные с ними длинные точные последовательности гомологий.

Упражнение 4: Доведите рассуждение до конца. Подсказка: покажите, что тензорная фильтрация на дг-коалгебре индуцирует фильтрацию на её когомологиях, которая в данном случае тоже окажется исчерпывающей.

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно! Важно иметь в виду следующее утверждение:

Упражнение 5: Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей. Докажите, что комплекс $\mathrm{Bar}(A)$ стягиваем. (Подсказка: стягивающим отображением будет подстановка единицы во все возможные тензорные места с чередующимися знаками).

Таким образом, класс квазиизоморфизма $\mathrm{Bar}(A)$, вообще говоря, не говорит об алгебре с единицей A ничего. В том числе поэтому зачастую бар-конструкцию рассматривают для аугментированных алгебр, и берут её от идеала аугментации. Но даже идеал аугментации может случайно оказаться алгеброй с единицей. Но и в этом случае потеряно не всё, потому что квазиизоморфизмы A^∞-алгебр это более узкий класс отображений, чем квазиизоморфизмы соответствующих дг-коалгебр.

Упражнение 6: Пусть $L_1 := \mathfrak{sl}_2$, а L_2 — абелева дг-алгебра Ли, порождённая одномерным векторным пространством в степени -2. Постройте отображение коалгебр $C_*(L_1) \longrightarrow C_*(L_2)$, индуцирующее изоморфизм на когомологиях. Докажите, что L_1 и L_2 не квазиизоморфны как L^∞-алгебры.

Бесконечность-алгебра называется **минимальной**, если $D_1 = 0$. Из теоремы о неявной функции следует, что квазиизоморфизм минимальных бесконечность-алгебр является изоморфизмом. Бесконечность-алгебра называется **стягиваемой**, если D_1 это стягиваемый дифференциал. Стягиваемая бесконечность алгебра изоморфна бесконечность-алгебре с тем же дифференциалом, но всеми остальными операциями, равными нулю. В самом деле, ... **Теорема о гомотопическом трансфере** утверждает, что любая бесконечность-алгебра *изоморфна* сумме минимальной и ацикличной.

Мы будем доказывать теорему о гомотопическом трансфере на следующей лекции, а пока обсудим несколько следствий. Во-первых, минимальная алгебра из её формулировки (так называемая **минимальная модель**) единственна с точностью до бесконечность-автоморфизма: она единственна с точностью до квази-изоморфизма, а квазиизоморфизм минимальных алгебр это изоморфизм. В частности, он обратим. В частности, любой квазиизоморфизм между двумя бесконечность-алгебрами квазиобратим — существует такое отображение в обратную сторону, что две композиции это изоморфизмы на когомологиях.

Упражнение 7: Приведите пример двух дг-алгебр A и B и морфизма $f : A \longrightarrow B$ такого, что f это квазиизоморфизм, но не существует морфизма $g : B \longrightarrow A$ такого, что fg и gf индуцируют изоморфизмы на когомологиях.

Но мы интересовались деформационными функторами. Покажем, что функтор Def естественным образом продолжается на категорию L^∞-алгебр.

Определение 8: Пусть L это L^∞-алгебра, и пусть $\mathfrak{m} \in \mathcal{ART}$. Рассмотрим кокоммутативную конильпотентную коалгебру $\mathfrak{m}^\vee =: \mathfrak{c}$. Элементом Маурера-Картана в $L \otimes \mathfrak{m}$ назовём гомоморфизм дг-коалгебр $m : \mathfrak{c} \longrightarrow C_*(L)$.

Покажем, что если L это дг-алгебра Ли, то это определение совпадает с тем, что мы изучали раньше. Гомоморфизм $\tilde{m} : \mathfrak{c} \longrightarrow C_*(L)$ задаётся своей линейной частью $m_1 : \mathfrak{c} \longrightarrow C_1(L)$, то есть, линейным отображением $m : \mathfrak{c} \longrightarrow L[1]$. При этом компоненты $m_k : \mathfrak{c} \longrightarrow C_k(L)$ равны $\mathfrak{m}_k(c) = \frac{1}{k!} m(c_{(1)}) \odot \cdots \odot m(c_{(k)})$ по доказанному в начале лекции. То, что гомоморфизм m коммутирует с дифференциалом, означает, что $Dm(c) = 0$ для любого $c \in \mathfrak{c}$. Опять же, достаточно проверить это равенство в коограничении на кообразующие, то есть, это равенство эквивалентно равенству $D_1 m(c) + \frac{1}{2} D_2(m(c_{(1)}) \odot m(c_{(2)}))$. Заметим, что для любой (возможно даже дг) нильпотентной коммутативной алгебры $\mathfrak{m}$ дг-алгебры Ли $L \otimes \mathfrak{m}$ и $\mathrm{Hom}(\mathfrak{c}, L)$ изоморфны, где скобка на $\mathrm{Hom}(\mathfrak{c}, L)$ задаётся равенством $[f, g](c) := (-1)^{|c_{(1)}||g|}[f(c_{(1)}), g(c_{(2)})]$. Вспоминая, что операции D_2 и $[,]$ отличаются друг от друга на нужный знак, видим, что $m^\vee$ это решение уравнения Маурера-Картана в точности когда $\tilde{m}$ коммутирует с дифференциалом.

Заметим, что в терминах операций Q уравнение Маурера-Картана выглядит как $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} Q_k(m, \ldots, m)$.

Для произвольной L^∞-алгебры L нулевая компонента L^0 не обязательно является алгеброй Ли. Поэтому калибровочную группу определить нельзя. Тем не менее, калибровочное отношение эквивалентности в бесконечность-мире существует.

Если C это произвольная дг-коалгебра, а A это коммутативная дг-алгебра, то тензорное произведение $C \otimes A$ является коалгеброй над A с коумножением $\Delta : C \otimes A \longrightarrow C \otimes A \otimes_A C \otimes A$, действующим по формуле $\Delta(c \otimes a) = c_{(1)} \otimes 1 \otimes_A c_{(2)} \otimes a$. Эта конструкция функториальна по A. Рассмотрим дг-алгебру $\Omega^*[t, dt]$, алгебру полиномиальных дифференциальных форм на прямой. Для каждой точки $\lambda \in k$ существует гомоморфизм вычисления $e_\lambda : \Omega^*[t, dt] \longrightarrow k$, действующий по формуле $e_\lambda(\sum x_i t^i + \sum y_i t^i dt) = \sum x_i \lambda^i$. Мы будем писать коротко $e_\lambda z(t) = z(\lambda)$. Два отображения дг-коалгебр $f_0, f_1 : C \longrightarrow D$ называются **гомотопными**, если существует отображение $\Omega^*[t, dt]$-коалгебр $F : C \otimes \Omega^*[t, dt] \longrightarrow D \otimes \Omega^*[t, dt]$ такое, что $e_0 F = f_0$ и $e_1 F = f_1$.

Назовём два элемента Маурера-Картана $m_0, m_1 : \mathfrak{c} \longrightarrow C_*(L)$ гомотопными, если они гомотопны как отображения коалгебр. Отношение гомотопности порождает отношение эквивалентности (на самом деле оно транзитивно, но это нам пока не понадобится); фактор по этому отношению будем называть $\mathrm{Def}_L(\mathfrak{m})$. Нам нужно показать, что, если L это дг-алгебра Ли, то отношение гомотопности совпадает с отношением калибровочной эквивалентности.

Гомоморфизм $M : \mathfrak{c} \longrightarrow C_*(L) \otimes \Omega^*[t, dt]$ это всё равно что элемент Маурера-Картана (в обычном смысле) в алгебре Ли $L \otimes \Omega^*[t, dt]$. Пусть $z(t) = x(t) + y(t)dt$ такой элемент. Напишем $dz(t) + \frac{1}{2}[z(t), z(t)]$. Раскрывая скобки, получаем, что

$$dx(t) + x'(t)dt + dy(t)dt + \frac{1}{2}[x(t), x(t)] + [x(t), y(t)]dt = 0. \tag{5}$$

То есть $x(t)$ это элемент Маурера-Картана при любом t, плюс к тому выполняется дифференциальное уравнение $x'(t) = -[x(t), y(t)] - dy(t)$. Для этого уравнения выполнена теорема существования и единственности: отображение Пикара $\varphi(t) \mapsto x(0) - \int_0^t([\varphi(s), y(s)] + dy(s))ds$ сжимающее в $\mathfrak{m}$-адической метрике и имеет неподвижной точкой решение диффура с начальным условием $x(0)$.

Пусть теперь $a * m_0 = m_1$ в L. Рассмотрим элемент $f(t) := (-ta) * m_0$ в $L \otimes \Omega^*[t, dt]$. Из уравнения $(-ta) * m_0 = \exp(\mathrm{ad}_{-ta})(m_0 + \delta) - \delta$ мы видим, что $f'(t) = \mathrm{ad}_{-ta}(\exp(\mathrm{ad}_{-ta})(m_0 + \delta)) = \mathrm{ad}_{-ta}((-ta) * m_0 + \delta) = -[ta, f(t)] + -dta$. Следовательно, $f(t)$ решает то же самое дифференциальное уравнение с тем же самым начальным условием, следовательно, для элементов Маурера-Картана в дг-алгебре Ли калибровочная эквивалентность и гомотопическая эквивалентность совпадают.

Наконец, мы видим, что выражение «функтор Def_L представляется алгеброй ли L» не является вольностью речи: этот функтор в самом деле представим в *гомотопической категории кокоммутативных конильпотентных дг-коалгебр.* На следующей неделе — гомотопический трансфер и построение версального пространства.

Упражнение 9: Пусть B это ассоциативная алгебра. Обозначим через $\mathrm{Der}_\infty(B)$ дг-алгебру Ли кодифференцирований коалгебры $\mathrm{Bar}(B)$, сохраняющих коаугментацию, с дифференциалом ad_D. Покажите, что классы калибровочной эквивалентности элементов Маурера-Картана в $\mathrm{Der}_\infty(B) \otimes \mathfrak{m}$ это деформации (без единицы) алгебры B над $A := \mathfrak{m} \oplus 1$ в смысле лекции номер один: это плоские A-алгебры $\tilde{B}$, снабженные изоморфизмом $\tilde{B}/\mathfrak{m} \longrightarrow A$, с точностью до A-линейных автоморфизмов $\tilde{B}$, тождественных на центральном слое. Проверьте, что эта алгебра изоморфна алгебре $HH(B)$ из первой лекции — это концептуальное объяснение операции $\circ$ и тождества Якоби для её коммутатора. Когомологии $H^*(\mathrm{Der}_\infty(B))$ дг-алгебры Ли $\mathrm{Der}_\infty(B)$ ещё называются **когомологиями Хохшильда** алгебры B.

Упражнение 10: Пусть $\mathfrak{g}$ это алгебра Ли. Докажите аналогичное утверждение про дг-алгебру Ли $\mathrm{Der}_\infty(\mathfrak{g})$ кодифференцирований $C_*(\mathfrak{g})$, сохраняющих коаугментацию, с дифференциалом ad_D. (Если знаете, что такое когомологии алгебры Ли, то) покажите, что когомологии $H(\mathrm{Der}_\infty(\mathfrak{g}))$ это *когомологии* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с коэффициентами в присоединённом представлении $C^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$.

Таким образом, развитая нами только что теория бесконечность-алгебр автоматически даёт и описание деформаций алгебр Ли и ассоциативных алгебр. Коммутативные алгебры тоже допускают такое обобщение, соответствующие алгебры называются C_∞-алгебрами, и соответствующие когомологии называются когомологиями Харрисона. В качестве бар-конструкции нужно будет брать свободную алгебру Ли; об этом речь пойдёт во второй половине семестра.