Теория деформаций

Лекция 2

Это записки лекций по теории деформаций в НМУ в весеннем семестре 2022 года. Со всеми вопросами, предложениями, найденными опечатками и ошибками пишите мне, Грише Папаянову, на почту `grisha@math.northwestern.edu` или в дискорд `https : //discord.gg/7jKHBTdrbH`.

Итак, мы заинтересованны в представимости функторов $F : \mathcal{ART} \longrightarrow \mathcal{SET}$, будь то в обычном смысле или в смысле представимости дг-алгебрами Ли. Двусмысленность слова "представимость"мы оставили вполне сознательно. Мы уже видели, что в для решения деформационных задач категория $\mathcal{ART}$ слишком узка и надо расширять её до про-объектов. На самом деле нам в основном будут нужны только про-объекты вполне конкретного вида, от диаграмм-последовательностей. Пусть у нас есть набор колец A_i для $i \in \mathbb{N}$ вместе с гомоморфизмами $f_i : A_i \longrightarrow A_{i-1}$. Напомним, что **Проективным пределом** $\lim A_i$ последовательности A_i называется подмножество в $\prod_{i_\mathbb{N}} A_i$, состоящее из таких наборов $(\dots, a_3, a_2, a_1, a_0)$, что $f_i(a_i) = a_{i-1}$. Покомпонентно введённые операции превращают $\lim A_i$ в кольцо. Кольца, изоморфные $\lim A_i$ мы будем называть проконечномерными кольцами.

Упражнение 1: Проверьте универсальное свойство предела: Гомоморфизмы из алгебры T в $\lim A_i$ это в точности семейства гомоморфизмов $t_i : T \longrightarrow A_i$, согласованные в том смысле, что $f_i t_i = t_{i-1}$. Иными словами, $Hom(T, \lim A_i) = \lim Hom(T, A_i)$.

На бесконечном произведении множеств A_i есть топология (тихоновская), которая нетривиальна, даже если на самих A_i никакой топологии не было. Рассмотрим метрику $d : \lim A_i \times \lim A_i \longrightarrow \mathbb{R}$ формулой $d(\{a_i\}, \{b_i\}) = \exp(\min\{i | a_i - b_i \neq 0\})$.

Упражнение 2: Докажите, что эта метрика задаёт тихоновскую топологию на $\lim A_i$ и что эта метрика полна.

Подчеркнём ещё раз, что топологию на самих пространствах A_i мы рассматриваем дискретную, даже если это векторные пространства над, например, полем вещественных чисел. Если кольца A_i были объектами категории $\mathcal{ART}$, то они являлись конечномерными, и получившееся топологическое векторное пространство $\lim A_i$ называется **псевдокомпактным**.

Обозначим через $\mathcal{PRO}$ категорию, объекты которой это локальные $\mathfrak{m}$-адически полные нётеровы алгебры. Условие $\mathfrak{m}$-адической полноты означает, что любая такая алгебра $\mathcal{A}$ изоморфна обратному пределу $\lim \mathcal{A}/\mathfrak{m}^i$, и каждая из алгебр $\lim \mathcal{A}/\mathfrak{m}^i$ конечномерна.

Функтор $F : \mathcal{ART} \longrightarrow \mathcal{SET}$ называется **пропредставимым**, если он изоморфен функтору $h_{\mathcal{A}} : A \mapsto Hom(\mathcal{A}, A)$ для какой-то алгебры $\mathcal{A}$ из категории $\mathcal{PRO}$ Под гомоморфизмами имеются в виду обычные гомоморфизмы колец. По отображению алгебр $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ строится морфизм функторов $h_{\mathcal{B}} \longrightarrow h_{\mathcal{A}}$ — пуллбек.

Семейством для функтора F над про-артиновой алгеброй $\mathcal{A}$ мы будем называть морфизм функторов $r : h_{\mathcal{A}} \longrightarrow F$.

Функтор F можно продолжить на категорию $\mathcal{PRO}$, положив $F(\lim A_i) := \lim F(A_i)$. По надлежащему варианту леммы Йонеды, семейство $r : h_{\mathcal{A}} \longrightarrow F$ это всё равно что элемент в $F(\mathcal{A})$ — поэтому оно так и называется. Семейство называется **универсальным**, если r это изоморфизм функторов.

Морфизм функторов $f : F \longrightarrow G$ на маленьких алгебрах называется **гладким**, если для любой сюръекции алгебр $q : B \longrightarrow A$ и для любых элементов $\alpha \in F(A)$ и $\beta \in G(B)$ таких что $f(\alpha) = G(q)(\beta)$ существует элемент $\gamma \in F(\beta)$, поднимающий β в том смысле, что $f(\gamma) = \beta$. Слово гладкий здесь отсылает к инфинитезимальному критерию гладкости, известному в алгебраической геометрии.

Семейство $r : h_{\mathcal{A}} \longrightarrow F$ называется **полным**, если оно гладко. Из этого определения следует, что любое F-семейство над A поднимается с $\mathcal{A}$: отображение множеств $Hom(\mathcal{A}, A) \longrightarrow F(A)$ сюръективно. Наконец, дадим самое интересное определение:

Полное семейство $r : h_{\mathcal{A}} \longrightarrow F$ называется **версальным**, если отображение множеств $h_A(k[t]/t^2) \longrightarrow F(k[t]/t^2)$ это биекция. (Как мы показали на прошлой лекции, при слабых предположениях на функтор F это будет линейное отображение между линейными пространствами).

Понятно, что универсальное семейство версально и полно. Понятно, что универсальное семейство, если оно существует, единственно с точностью до единственного изоморфизма. Версальное семейство единственно, но не обязательно с точностью до единственного изоморфизма: в силу полноты, между двумя версальными семействами существует морфизм $h_{\mathcal{A}} \longrightarrow h_{\mathcal{A}'}$, который в силу леммы Йонеды соответствует морфизму $\mathcal{A}' \longrightarrow \mathcal{A}$, который является изоморфизмом на касательных пространствах. Аналогично, существует такой же морфизм $h_{\mathcal{A}'} \longrightarrow h_{\mathcal{A}}$. Автоморфизм нётеровой локальной алгебры, индуцирующий автоморфизм на касательных пространствах, изоморфизм в силу леммы Накаямы.

Полных семейств может быть много. На прошлой лекции мы упоминали теорему Шлезингера, которая утверждает, что функтор $F : \mathcal{ART} \longrightarrow \mathcal{SET}$, удовлетворяющий аксиомам H0) – H4), представим, то есть обладает универсальным семейством. Шлезингер доказал, помимо этого, что функтор, удовлетворяющий аксиомам H0) – H3) допускает версальное семейство. Мы докажем теорему Кураниши в такой формулировке: функтор Def_L для дг-алгебры Ли с конечномерными когомологиями L допускает версальное семейство.

Упражнение 3: Рассмотрим функтор $T : \mathcal{ART} \longrightarrow \mathcal{SET}$, где $T(A) := \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Постройте версальное семейство. Докажите, что этот функтор не пропредставим.

Если у алгебры ли нет дифференциала, то база версального семейства это квадратичный конус в L^1: уравнение Маурера-Картана вырождается в этом случае в $[x, x] = 0$. Это семейство в общем случае не универсально из-за действия алгебры ли L^0. План доказательства теоремы Кураниши в полной общности состоит в изучении того, как функтор Def_L зависит от L. Мы докажем напрашивающееся утверждение, что он зависит только от класса квазиизоморфизма L. Для того, чтобы изучать дг-алгебры Ли с точностью до квазиизоморфизма, удобно перейти к так называемым L^∞-алгебрам. Каждая дг-алгебра ли квазиизоморфна в L^∞-смысле L^∞-алгебре с нулевым дифференциалом, продолжение функтора Def на которых допускает сравнительно простое описание. Удобный описывать соотношения в L^∞-алгебрах это работать с так называемыми кошулево двойственными коалгебрами: для дг-алгебры это просто гомологический комплекс Шевалле. С другой стороны, артиновы алгебры конечномерны — можно взять к ним двойственные пространства и получить конечномерные же коалгебры. По проартиновым алгебрам таким образом можно получить тоже коалгебры — не обязательно конечномерные, но без всякой топологии. В этом состоит связь между функторами на маленьких алгебрах и алгебрами Ли — и то и другое тесно связано с кокоммутативными коалгебрами. Поэтому сейчас мы будем обсуждать коалгебры.

Градуированная коассоциативная **коалгебра** над полем k это градуированный k-модуль вместе с отображениями коединицы $\eta : C \longrightarrow k$ и коумножения $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$, удовлетворяющими некоторым свойствам. Свойство коединицы говорит, что композиции $(\eta \otimes \mathrm{Id})\Delta$ и $(\mathrm{Id} \otimes \eta)\Delta : C \longrightarrow C \otimes C \longrightarrow C$ тождественны. Свойство коассоциативности утверждает, что композиции $(\Delta \otimes \mathrm{Id})\Delta$ и $(\mathrm{Id} \otimes \Delta)\Delta : C \longrightarrow C \otimes C \longrightarrow C \otimes C \otimes C$ равны.

Напомним, что если $(V_{1,2}, d_{1,2} \in \mathrm{End}^1(V_{1,2}))$ это два комплекса, то структура комплекса на их тензорном произведении вводится по формуле $d_{1\otimes 2} = d_1 \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes d_2$. Это равенство на уровне операторов: применённое к элементам, оно имеет вид $d(v \otimes w) = d(v) \otimes w + (-1)^{|v|} v \otimes d(w)$. Коалгебра (C, d) называется дг-коалгеброй, если отображения коумножения и коединицы коммутируют с дифференциалами.

Упражнение 4: Покажите, что если k это поле, то на когомологиях $H := \frac{\operatorname{Ker} d}{\operatorname{Im} d}$ дг-коалгебры есть естественная структура градуированной коалгебры. Покажите, что если k это кольцо, то это не обязательно так. (но это всё ещё так если C^i это плоские k-модули.

Аксиомы коалгебры в моноидальной категории $\mathbb{C}$ коротко можно сформулировать так: C задаёт структуру алгебры в противоположной категории $\mathbb{C}^{opp}$. Категорию $k - Vect^{opp}$ для поля k несложно описать: Во-первых, категория конечномерных пространств $k - Vect_f$ эквивалентна своей противоположной посредством взятия двойственного пространства. Во-вторых, каждое векторное пространство изоморфно прямому пределу конечномерных векторных пространств (даже прямой сумме одномерных). Значит, каждый объект категории $k - Vect^{opp}$ изоморфен прямому пределу конечномерных векторных пространств. Мы уже обсуждали, что такие пространства называются псевдокомпактными (иногда используют термин "локально линейно компактные пространства": в случае поля оба определения описывают один и тот же объект). Верен результат, что категория $k - Vect^{opp}$ эквивалентна категории псевдокомпактных векторных пространств. Даже без этой эквивалентности, каждый объект это проективный предел конечномерных.

Алгебра, которая является проективным пределом конечномерных векторных пространтств, вообще говоря, не то же самое, что и проективных предел конечномерных алгебр. Однако некоторое математическое чудо состоит в том, что это утверждение верно.

Theorem 5: Всякая коассоциативная коалгебра C над полем k является объединением своих конечномерных подкоалгебр (таких подпространств V, что $\Delta(V) \subset V \otimes V$).

Доказательство: Будем обозначать через $\Delta^i : C \longrightarrow C^{\otimes i-1}$ итерированное отображение коумножения; в силу коассоциативности, оно не зависит от того, к какому именно из сомножителей мы применяем отображение Δ в очередной раз. Пусть $v \in C$; мы хотим найти конечномерную подкоалгебру, содержащую v. Рассмотрим $\Delta^2(v) = \sum_{i,j} x_i \otimes v_{ij} \otimes y_j$, где x_i линейно независимы и y_j линейно независимы. Вектора v_{ij} порождают конечномерное подпространство $V \subset C$. Так как $\mathrm{Id} = (\eta \otimes \mathrm{Id} \otimes \eta)\Delta^2$, $v \in V$. Покажем, что $\Delta : V \longrightarrow V \otimes C$. Для этого, воспользовавшись коассоциативностью, приравняем $\sum_{i,j} \Delta(x_i) \otimes v_{ij} \otimes y_j = \sum_{i,j} x_i \otimes \Delta(v_{ij}) \otimes y_j$. Поскольку y_j линейно независимы между собой, мы видим что $\sum_i \Delta(x_i) \otimes v_{ij} = \sum_i x_i \otimes \Delta(v_{ij})$. Левая часть равенства лежит в $C \otimes C \otimes V$, значит, и правая часть тоже. Поскольку x_i линейно независимы, получаем, что $\Delta(v_{ij}) \in C \otimes V$. Аналогично, $\Delta(v_{ij}) \in V \otimes C$. Получаем, что $\Delta(V) \in V \otimes V$, то есть V это подкоалгебра.

Упражнение 6: Докажите, что каждая коассоциативная дг-коалгебра является объединением своих конечномерных дг-подкоалгебр.

Это утверждение тем удивительнее, что без условия коассоциативности оно неверно.

Упражнение 7: Дайте определение коалгебры Ли. Покажите, что векторное пространство с базисом $e_i, i \in [-1..\infty]$ и коумножением, заданным по правилу $c(e_n) := \sum_{i+j=n} \frac{1}{i-j}(e_i \otimes e_j)$, не содержит никаких подкоалгебр. Опишите двойственную алгебру Ли в каких-нибудь геометрических терминах.

Коалгебра называется **кокоммутативной**, если композиция $\tau_{C,C}\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ равна оператору Δ. Если A это алгебра из категорий $\mathcal{ART}$ или $\mathcal{PRO}$, то двойственное векторное пространство $A^\vee$ это кокоммутативная коассоциативная коалгебра, соответственно, конечномерная или произвольная.

Основное поле k тривиальным образом является коалгеброй. **Коаугментацией** на (дг-)коалгебре называется отображение (дг-)коалгебр $\iota : k \longrightarrow C$.

Пример 8: Предположим, что V это какое-то градуированное пространство. обозначим через TV пространство $\oplus_{i=0}^{\infty} V^{\otimes i}$. Определим операцию $c : TV \longrightarrow TV \otimes TV$ по формуле

$$c(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) := \sum_{i=0}^{n} (v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n), \tag{1}$$

где под пустым тензорным произведением мы понимаем элемент $1 \in V^{\otimes 0} \in TV$. Обратите внимание, что значок $\otimes$ обозначает в этой формуле две разные вещи. Мы отделяем два разных смысла друг от друга скобками; иногда описанную выше формулу можно встретить в виде $[v_1|\ldots|v_i] \otimes [v_{i+1}|\ldots|v_n]$. От этих палочек этимологически происходит термин "бар-конструкция".

Легко проверить, что коалгебра TV с коумножением c коассоциативна. Отщеплённое подпространство $k \subset TV$ задаёт коединицу и коаугментацию.

На пространстве $T^n V := V^{\otimes n}$ действует симметрическая группа на n буквах Σ_n по правилу $\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) := (-1)^{\varepsilon} v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$, где ε равно количеству инверсий нечётных элементов в перестановке $\sigma \in \Sigma_n$.

Упражнение 9: Это правое или левое действие?

Пространство инвариантов относительно этого действия обозначим через $S^nV := (T^nV)^{\Sigma_n}$. Подпространство $SV := \oplus_{i=0}^{\infty} S^nV \subset TV$ является кокоммутативной подкоалгеброй в TV. Обе эти коалгебры обладают одним важным свойством.

Упражнение 10: Проверьте, что для коаугментированной коалгебры факторпространство $C/\iota k$ само по себе является коалгеброй (коассоциативной, но без коединицы).

Коалгебра $(E, \overline{\Delta})$ без коединицы называется **конильпотентной**, если фильтрация на E, заданная ядрами итерированных коумножений $\overline{\Delta}^n : E \longrightarrow E^{\otimes n}$, исчерпывающая, то есть, если каждый элемент умирает, если его достаточное число раз коумножить. Коаугментированная коалгебра (C, ι) называется **конильпотентной**, если коалгебра $C/\iota k$ конильпотентна.

Упражнение 11: Докажите, что у коаугментированной конильпотентной коалгебры коаугментация единственна.

Примеры: TV и SV конильпотентны, соответствующие фильтрации совпадают с тензорными фильтрациями $T^{\leq n}$. Прямая сумма тривиальных коалгебр не конильпотентна. Чуть менее нетривиальный пример: рассмотрим конечную группу G и рассмотрим пространство $C(G)$ функций на G со значениями в поле. Поскольку $C(G \times G) = C(G) \otimes C(G)$, и умножение в группе коассоциативно, отображение пуллбека функций относительно умножения $C(G) \longrightarrow C(G) \otimes C(G)$ задаёт на $C(G)$ структуру коалгебры. Коединицей служит отображение вычисления в единице группы.

Упражнение 12: Опишите коумножение в базисе из δ_g — дельта-функций в элементах группы. Покажите, что элемент $\sum_{g \in G} \delta_g$, где сумма ведётся по всем элементам G, задаёт коаугментацию. Покажите, что $C(G)$ не конильпотентна.

Упражнение 13: Покажите, что TV это свободная конильпотентная коассоциативная коалгебра, порождённая пространством V, а SV — свободная конильпотентная кокоммутативная коассоциативная коалгебра, в том смысле, что функторы T и S сопряжены забывающим функторам из соответствующих категорий в векторные пространства.

Определение 14: L^∞-алгебра L это градуированное векторное пространство L вместе с отображением $D : S(L[1]) \longrightarrow S(L[1])$, превращающим $(S(L[1]), D)$ в коаугментированную дг-коалгебру. Морфизм L^∞-алгебр это отображение соответствующих дг-коалгебр.

Соответствующую кокоммутативную дг-коалгебру мы будем обозначать через $CE_*(L)$ или просто через $C_*(L)$. Дг-алгебра Ли в этих терминах мыслится как свой комплекс Шевалле-Эйленберга — стандартный комплекс, вычисляющий её *гомологии*. В следующей лекции мы опишем дифференциалы на симметрической коалгебре в терминах полилинейных операций на L, покажем, как в категорию L^∞-коалгебр строго, но не полно вкладывается категория дг-алгебр Ли, определим функтор Def_L для L^∞-алгебр, и может быть, докажем, но скорее всего только начнём доказывать теорему о гомотопическом трансфере, которая, помимо прочего, связывает функтор Def_L с функтором Def_H, где H это некоторая L^∞-структура на когомологиях L.