Комплексный анализ, краткий конспект 2022

1. Первая лекция, 9 февраля

1.1. Комплексные числа. Мы будем оперировать с комплексными числами, которые легко определить, как множество всех упорядоченных пар вещественных чисел на котором введены операции сложения:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

и умножения

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad).$$

Хорошо известно (и это задача), что эти две операции порождают структуру поля комплексных чисел $\mathbb{C}$. Чуть сложнее проверить существование обратного элемента. Комплексное число $(0, 1)$ записывают как i, вещественные числа вкладывают в комплексные стандартным образом $a \mapsto (a, 0)$ и отождествляют их со своими образами. Легко проверить, что

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi.$$

Число a называется *вещественной частью* числа $z = a + bi$ и обозначается $\operatorname{Re} z$, а число b называется *мнимой частью* z и обозначается $\operatorname{Im} z$.

Мы часто будем пользоваться *сопряжением*. Число, сопряженное $a + bi$, это $a - bi$ (a и b вещественны). Сопряженное числу z число обозначают через $\overline{z}$. Проверьте, что сопряжение есть изоморфизм поля комплексных чисел.

1.2. Модуль и аргумент комплексного числа. Модуль комплексного числа $z = a + bi$ это величина

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Аргументом ненулевого комплексного числа z называют $\varphi \in [0, 2\pi[$ такое, что

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Надо доказать, что такой угол φ есть и что он единственен. Обозначается он так: $\arg(z)$. Множество $\{\varphi+2\pi n | n \in \mathbb{Z}\}$ обозначается $\operatorname{Arg} z$.

Модуль и аргумент очень важны для произведения комплексных чисел: при произведении чисел модули перемножаются, а аргументы складываются (по модулю 2π). С помощью этого обстоятельства легко вспоминать формулы для $\sin(x + y)$. Вот еще нам много раз понадобится

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

1.3. Топология. При помощи модуля множество комплексных чисел превращается в метрическое пространство: расстояние между z_1 и z_2 равно $|z_1 - z_2|$ (докажите неравенство треугольника). Можно также как в $\mathbb{R}$ определить что такое ε-окрестность, сходящаяся последовательность, предел функции, непрерывная функция. Да, значения функций (которые мы будем рассматривать) уже не обязательно вещественны. И свойства пока что совершенно параллельны свойствам вещественных функций. Разница в том, что эти функции становится непросто представлять. Область определения это будет подмножество

$\mathbb{C}$, часто все $\mathbb{C}$ или $\mathbb{C}$ без дискретного (скажем, конечного) множества точек, в любом случае это множество с непустой внутренностью. График такой функции – двумерная (вещественно) поверхность в четырехмерном (вещественно) пространстве $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Представлять его себе уже непросто.

1.4. Первые функции. Самые простые (но уже очень интересные) функции это многочлены. Чуть позже мы докажем основную теорему алгебры. Экспонента –

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Экспонента всячески замечательная функция, про нее нужно многог чего понимать. Правильно начать с доказательства равенства

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Которое говорит, что экспонента является гомоморфизмом аддитивной группы $\mathbb{C}$ в мультипликативную группу $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Докажите, что

$$e^z = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n})^n.$$

Тригонометрические функции sin и cos есть линейные комбинации экспонент

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

Проверьте, что это определение согласовано на $\mathbb{R}$. Тангенс определяется стандартно, как отношение синуса и косинуса. Гиперболические тригонометрические функции ch и sh тоже являются линейными комбинациями экспонент, как это и было на вещественной прямой:

$$\mathrm{ch}z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \mathrm{sh}z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

1.5. Производная. Производная тоже определяется точно также как в вещественном случае:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Но ее роль сильно отличается от роли производной в вещественном анализе. Оказывается, например, что если функция дифференцируема на открытом множестве U – в комплексном анализе говорят – *голоморфна*, то у нее есть производные любого порядка на этом открытом множестве. Более того, функция, имеющая производную, является *аналитической*, т.е. ее ряд Тейлора с центром в произвольной точке $z_0 \in U$ сходится к самой функции в некотором диске с центром в этой точке

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + ...$$

1.6. Основная теорема алгебры. Будем доказывать основную теорему алгебры в следующей форме: у многочлена степени $n > 0$ есть корень. Обозначим многочлен через P. Функция $|P|^2$ непрерывна на $\mathbb{C}$, ее предел в ∞ равен $+\infty$. Действительно,

$$P(z) = z^n(A_n + \frac{A_{n-1}}{z} + \frac{A_{n-2}}{z^2} + ...).$$

Все что в скобках стремится к $A_n \neq 0$, а z^n стремится к бесконечности.

Следовательно, функция $|P|^2$ достигает своего минимального значения на $\mathbb{C}$ в какой-то точке. В самом деле, $\mathbb{C}$ можно представить в виде объединения диска с центром в нуле и замыкания от дополнения. Если радиус диска достаточно большой, то на дополнении до диска функция $|P|^2$ большая (она же стремится в плюс бесконечность в бесконечности). Диск же компактен, следовательно на нем $|P|^2$ достигает наименьшего значения, которое меньше значений на граничной окружности.

Будем считать, что z, при котором $|P(z)|^2$ минимален, равен нулю. В самом деле, если минимум достигается в точке z_0, то у функции $|P(z - z_0)|$ он достигается в нуле. То есть подходящим сдвигом все сводится к случаю, когда минимум достигается в нуле. Докажем, что в таком случае $P(0) = 0$. Это доказывается "от противного" если $P(0) = a_0 \neq 0$, то мы покажем, что из нуля можно сдвигаться так чтобы модуль уменьшался.

Будем сдвигаться (меняя r) вдоль луча, выходящего из нуля $z = e^{i\varphi}r$ при подходящем значении параметра φ. Имеем

$$P(z) = a_0 + a_1 z^k + ...$$

для ненулевых a_0 (так мы используем предположение $P(0) = a_0 \neq 0$) и a_1 и натурального k (так мы используем предположение о степени многочлена). Многоточием обозначены члены степени выше k. Тогда

$$|P(z)|^2 = P(z)\overline{P(z)} = a_0\overline{a_0} + a_0\overline{a_1 z^k} + \overline{a_0}a_1 z^k + ...$$

В каждое слагаемое из “многоточия” r входит в степенях больше чем k. Для нас интересны слагаемые самой маленькой положительной степени в этой сумме. Это $a_0\overline{a_1 z^k}+\overline{a_0}a_1 z^k$. Коэффициент при r^k равен $2\mathrm{Re}(a_0\overline{a_1}e^{-ik\varphi})$. Если менять значение φ от 0 до 2π, то это число пробежит n раз окружность с центром в нуле в отрицательную сторону. Следовательно, можно подобрать такое φ, что $2\mathrm{Re}(a_0\overline{a_1}e^{-ik\varphi})$ отрицательно. Если сдвигаться вдоль соответствующего луча, то $|P(z)|^2$ будет уменьшаться (при достаточно малых r). Это приводит к противоречию и теорема доказана.

1.7. Разные задачи. Некоторые примеры задач, в которых язык комплексных чисел может помочь. Таких задач очень много.

Например, язык комплексных чисел бывает полезен для описания движений плоскости. Каждое движение плоскости есть или преобразование вида $z \mapsto az+b$, где $|a|=1$, или $z \mapsto a\overline{z}+b$, где $|a|=1$.

Приведем еще несколько примеров. Например "теорема Наполеона". На плоскости рассмотрим треугольник. Расположим внешним образом у каждой стороны x этого треугольника равносторонний треугольник, у которого одна из сторон есть x. Получим три равносторонних треугольника. Надо доказать, что их центры являются вершинами равностороннего треугольника.

Рассмотрим график вещественного многочлена степени 4, имеющего 4 различных корня и положительного в бесконечности. Можно пустить шарик кататься между крайними левыми корнями (в одну яму) и между крайними правыми корнями (в другую яму), отпустив их с нулевой скоростью от нулевого уровня высоты. Тогда один и другой будут периодически кататься в своей яме. Надо доказать, что их периоды равны.

И вот еще один пример – теорема (поризм) Понселе. Рассмотрим один эллипс внутри другого. Рассмотрим также ломаную из хорд внешнего эллипса, касающихся внутреннего эллипса. Утверждается, что она или всегда (независимо от начальной точки) замыкается за одно и то же число шагов или всегда не замыкается.

2. Лекция вторая.

2.1. Дробно-линейные преобразования. Рассмотрим дробно-линейные преобразования, преобразования вида:

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

где a, b, c, d комплексные числа, причем определитель матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ не равен нулю. Нам будет удобно "пополнить" комплексную прямую, добавив к ней всего одну точку ∞, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Удобно сразу же превратить это множество в топологическое пространство, введя "базу топологии" как открытые круги на плоскости и множества $\{|z| > R\} \cup \{\infty\}$ (это база окрестностей бесконечности). Это пространство гомеоморфно двумерной сфере.

Задача. Проверьте, что это дробнолинейные преобразования определяют гомеоморфизмы $\overline{\mathbb{C}} \mapsto \overline{\mathbb{C}}$, эти гомеоморфизмы образуют группу (относительно композиции) и соответствие "матрица $\to$ дробно-линейное преобразование" является гомоморфизмом групп.

Задача. Какие дробно-линейные преобразования переводят ∞ в ∞?

Мы назовем обобщенной окружностью в $\overline{\mathbb{C}}$ обычную окружность в $\mathbb{C} \subset \overline{\mathbb{C}}$ или прямую в $\mathbb{C}$, объединенную с ∞. При стереографической проекции $S^2 \setminus \{pt\} \to \mathbb{C}$ (тут pt – северный полюс) в обобщенные окружности (без ∞) переходят обычные окружности (без pt) на сфере S^2.

Утверждение. Обобщенная окружность в $\mathbb{C}$ задается уравнением

$$Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0$$

где A и C вещественные числа, B комплексное.

Доказательство. В самом деле, уравнение обобщенной окружности это (как легко проверить)

$$A(x^2+y^2)+B_1x+B_2y+C=0,$$

где все коэффициенты вещественны. Теперь легко сообразить, что на комплексном языке получается формула приведенная выше.

Для дробно-линейного преобразования

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

при $c=0$ утверждение очевидно (преобразование $z \mapsto Az+B$ переводит прямые в прямые, а окружности в окружности). В случае $c \neq 0$ наше дробно-линейное преобразование есть композиция сдвига, преобразования $\frac{1}{z}$ и преобразования вида $z \mapsto Az+B$. Таким образом достаточно доказать, что $\frac{1}{z}$ переводит обобщенные окружности в обобщенные окружности. Это можно сделать (минимум) тремя способами. Во-первых, воспользуемся утверждением и сразу это увидим из формулы для обобщенных окружностей. Во-вторых, преобразование $z \mapsto \frac{1}{z}$ есть композиция инверсии и сопряжения. Можно сослаться на геометрическую теорему о том, что инверсия переводит прямые и окружности в прямые и окружности (советую всем, кто этого не делал в школе, доказать эту теорему). В-третьих, можно не аппелировать к инверсии, а при помощи стереографической проекции посмотреть, что преобразование $z \mapsto \frac{1}{z}$ это вращение(!) сферы (переводящее тем самым окружности в окружности).

Что еще бывает полезно. Назовем две точки z_1 и z_2 симметричными относительно окружности, если одна из них переходит в другую при инверсии относительно этой окружности. Это значит, что точки z_0, z_1, z_2 лежат на одном луче, выходящем из центра z_0 окружности радиуса r:

$$|z_1 - z_0||z_2 - z_0| = r^2$$

(точка бесконечность переходит в z_0). Докажите, что две точки z_1 и z_2 симметричны относительно окружности

$$Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0$$

, если

$$Az_1\overline{z_2} + Bz_1 + \overline{B}\overline{z_2} + C = 0.$$

Докажите, что дробно-линейные отображения сохраняют симметрию (точки симметричные относительно обобщеной окружности переходят в точки симметричные относительно образа этой окружности).

Еще нужно доказать, что дробно-линейные преобразования “сохраняют углы” между кривыми. Действительно, они комплексно-дифференцируемы, значит (локально) выглядят как

$$z \mapsto kz + ...$$

Значит их линейное приближение есть поворотная гомотетия. Кроме этого рассуждения, можно еще вспомнить, что дробно-линейное отображение есть композиция афинных и инверсии, а инверсия сохраняет углы между обобщенными окружностями (докажите!).

Немного поговорим о теореме, к которой мы начинаем стремиться. Эта теорема (Римана) говорит, что непустое открытое связное и односвязное подмножество в $\mathbb{C}$ "биголоморфно эквивалентно" диску за исключением единственного случая, когда она сама есть все $\mathbb{C}$.

Голоморфная функция, как мы говорили, в прошлый раз – это просто дифференцируемая функция (определенная в каком-то открытом множестве).

Сейчас мы поговорим о степенных рядах, так в конце-концов и окажется: любая голоморфная функция раскладывается в степенной ряд.

2.2. Радиус сходимости. Рассмотрим степенной ряд с центром в нуле

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

Лемма 2.1. Пусть все члены ряда ограничены при $x = x_0$. Тогда при всех $|x| < |x_0|$ ряд сходится абсолютно.

Построим ряд $\sum \alpha_n r^n$, где $\alpha_n = |a_n|$. Пусть $r_0 = |x_0|$. Тогда этот ряд сходится при $r < r_0$, расходится при $r > r_0$ (это определение числа r_0, оно может быть нулем или бесконечностью). Оказывается исходный ряд равномерно сходится при

$$|x| \leq r < r_0.$$

В самом деле, остаток оценивается остатком геометрической прогрессии. И расходится при $|x| > r_0$ – поскольку его общий член не может быть ограничен.

Задача 1. Докажите, что

$$\frac{1}{r_0} = \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n}.$$

2.3. Производная. Производная степенного ряда: составим формально ряд $\sum na_n z^{n-1}$. Во-первых, его радиус сходимости не больше радиуса сходимости исходного ряда ибо если на r ассоциированный ряд домножить, то он почленно больше ассоциированного к исходному. Во-вторых, легко показать, что он сходится при всех $r < r_0$:

$\alpha_n r_1^n < M$ при $r < r_1 < r_0$

$$n\alpha_n r^{n-1} = n\alpha_n r_1^n (r/r_1)^n 1/r \leq nM/r(r/r_1)^n,$$

а последний ряд сходится.

Докажем теперь, что этот ряд $\sum na_n z^{n-1}$ есть настоящая производная исходного ряда в круге сходимости:

$$S'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{S(z+h) - S(z)}{h}.$$

Действительно:

$$\frac{S(z+h) - S(z)}{h} - S'(z) = \sum_{n\geq 1} u_n(z,h),$$

где

$$u_n(z,h) = a_n((z+h)^{n-1} + z(z+h)^{n-2} + ... + z^{n-1} - nz^{n-1}).$$

Откуда

$$|u_n(z,h)| \leq 2n\alpha_n r^{n-1},$$

где $|z|, |z+h| < r$. Ряд $\sum 2n\alpha_n r^{n-1}$ положителен и сходится – его остаток мал, а первые члены многочлены и стремятся к нулю.

Отметим, что если радиус сходимости ряда $f(z) = \sum a_n z^n$ больше нуля, то функция f бесконечно дифференцируема в открытом круге и

$$f^{(n)}(0) = n! a_n,$$

так что она совпадает со своим рядом Тейлора.

2.4. Аналитичность. Другая важная теорема — степенной ряд аналитичен в своем круге сходимости. Рассмотрим степенной ряд

$$S(x) = \sum a_n x^n$$

с радиусом сходимости ρ.

Теорема 2.1. Рассмотрим точку x_0, такую что $|x_0| < \rho$. Тогда степенной ряд

$$\sum \frac{1}{n!} S^{(n)}(x_0) Z^n$$

имеет радиус сходимости не меньше $\rho - |x_0|$ а при $|x - x_0| < \rho - |x_0|$

$$S(x) = \sum \frac{1}{n!} S^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

Доказательство. Имеем (положим $r_0 = |x_0|$)

$$S^{(p)}(x_0) = \sum_{q \geq 0} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q} x_0^q,$$

$$|S^{(p)}(x_0)| \leq \sum_{q \geq 0} \frac{(p+q)!}{q!} \alpha_{p+q} r_0^q,$$

где как и раньше положим $|a_n| = \alpha_n$. При $r_0 \leq r \leq \rho$

$$\sum_{p\geq 0} \frac{1}{p!}|S^{(p)}(x_0)|(r-r_0)^p \leq \sum_{p,q} \frac{(p+q)!}{p!q!}\alpha_{p+q} r_0^q (r-r_0)^p \leq$$

$$\leq \sum_{n\geq 0} \alpha_n (\sum_{0\leq p\leq n} \frac{n!}{p!(n-p)!}(r-r_0)^p r_0^{n-p}) \leq \sum_{n\geq 0} \alpha_n r^n < +\infty$$

следовательно радиус сходимости не меньше $r - r_0$, а r можно брать близко к ρ. Поэтому радиус сходимости не меньше $\rho - |x_0|$.

Пусть $|x - x_0| < \rho - |x_0|$ двойной ряд

$$\sum_{p,q} \frac{(p+q)!}{p!q!} a_{p+q} x_0^q (x-x_0)^p$$

сходится абсолютно. И можно его вычислять, группируя члены как угодно. Так, с одной стороны:

$$\sum_{n\geq 0} a_n (\sum_{0\leq p\leq n} \frac{n!}{p!(n-p)!}(x-x_0)^p x_0^{n-p}) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = S(x).$$

Или суммируя иначе

$$\sum_{p\geq 0} \frac{(x-x_0)^p}{p!}(\sum_{q\geq 0} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q} x_0^q) = \sum_{p\geq 0} \frac{(x-x_0)^p}{p!} S^{(p)}(x_0).$$

Что и доказывает теорему.

2.5. Замечание. Радиус сходимости в точке x_0 может быть больше $\rho - |x_0|$. Найдите радиус сходимости ряда Тейлора функции

$$\frac{1}{1+x^2}$$

с центром в точке $a \in \mathbb{R}$.

3. Лекция третья.

3.1. Векторные поля и дифференциальные формы.

Сначала касательное пространство, векторные поля. Потом кокасательное пространство, формы $Pdx+Qdy$ коэффициенты, вообще говоря, комплексно-значные непрерывные функции.

3.2. Интеграл дифференциальной формы вдоль пути. Интеграл формы ω вдоль пути γ можно определить так:

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{a}^{b} \gamma^*(\omega)$$

Подумайте, что значит и почему, что интеграл не меняется при замене параметра. Подход через разбиения - правильно вначале.

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} \omega(\xi_i).$$

Лемма 3.1. В связной области можно добраться из точки в любую другую точку по кусочно-гладкому пути.

При интегрировании важнее всего знать, что

$$\int\limits_{\gamma} dF = F(b) - F(a).$$

Это “формула Ньютона-Лейбница”.

3.3. Первообразная дифференциальной формы. Функция F называется первообразной формы ω, если $dF = \omega$.

Лемма 3.2. Форма имеет первообразную, если и только если интеграл этой формы по любому замкнутому кусочно-гладкому пути равен нулю.

Необходимость очевидна

Достаточность строим F как интеграл ω от фиксированной точки, доказываем $dF = \omega$ явным взятием дифференциала.

Пусть теперь только по границе прямоугольника интеграл равен нулю. Тогда если область круг, то первообразная есть. (Лемма)

Формула Грина. П – прямоугольник, γ его граница. Тогда

$$\int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy = \int\limits_{\Pi} (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dx \wedge dy$$

Теорема 3.1. Если $Pdx + Qdy$ в области такова что $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ существуют и непрерывны в этой области. Тогда необходимое условие существования первообразной есть

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Для круга оно же является и достаточным.

3.4. Замкнутые формы. Назовем форму замкнутой (коэффициенты непрерывны) если для каждой точки в некоторой ее окрестности есть первообразная. Из того что мы обсудили следует: Для замкнутости необходимо и достаточно чтоб для всякого достаточно малого прямоугольника, стороны которого параллельны осям координат, интеграл по его границе равен нулю. Если предположить существование частных производных первого порядка, то необходимым и достаточным будет

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Пример области и формы замкнутой, но не имеющей в этой области первообразной. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и форма

$$\frac{dz}{z}$$

3.5. Голоморфность. Проверьте, что комплексно-дифференцируемая функция f является вещественно дифференцируемой и

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Докажите, что функция f такова что она вещественно дифференцируема и ее частные производные связаны в точке этим соотношением, то она и голоморфна.

Введение dz, $d\bar{z}$ и

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}), \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$$

Проверьте, что

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$$

а условие голоморфности имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

Теорема Коши это следующая теорема.

Теорема 3.2. Если функция f голоморфна в области, то $f(z)dz$ замкнута в этой области.

1. Действительно, если предположить непрерывность частных производных, то автоматически.
2. Если не предполагать

$$\int\limits_{\partial\Pi} f(z)dz = g(\Pi)$$

делим на 4 равные части есть такой Π_1, что $|g(\Pi_1)| \geq 1/4|g(\Pi)|$ и дальше так делим и выбираем - сходится к z_0

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z)|z - z_0|$$

при этом

$$\lim_{z\to z_0} \varepsilon(z) = 0$$

откуда

$$\int\limits_{\partial\Pi_k} f(z)dz = f(z_0)\int\limits_{\partial\Pi_k} dz + f'(z_0)\int\limits_{\partial\Pi_k} (z - z_0)dz + \int\limits_{\partial\Pi_k} \varepsilon(z)|z - z_0|dz$$

два первых интеграла равны нулю, а последний бесконечно малая высшего порядка чем $1/4^k$. Откуда $\int f(z)dz = 0$.

Следствие 3.1. У голоморфной функции есть локально первообразная, которая голоморфна.

Следствие 3.2. Для голоморфной функции $\int f(z)dz = 0$ по замкнутому пути, стягиваемому в точку.

4. Лекция четвертая.

Теорему Коши можно немного усилить (бывает полезно) — пусть функция непрерывна в области и голоморфна всюду кроме точек прямой, параллельной действительной оси. Тогда $f(z)dz$ замкнута в этой области.

Нужно показать, что интеграл $f(z)dz$ по границе всякого прямоугольника из области равен нулю. Если прямоугольник не пересекается с прямой это верно. Если прямая проходит через одну из сторон - предельный переход. Если пересекает иначе, то разбиваем на два прямоугольника и тоже предельный переход.

Немного топологии – индекс замкнутой кривой относительно точки. Пусть в $\mathbb{C}$ фиксирована точка. Тогда вы знаете из курса топологии, что $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{a\})$ очень проста, она изоморфна $\mathbb{Z}$. Есть два таких изоморфизма и мы фиксируем "математический" – обход один раз вокруг a против часовой стрелки переходит в единицу. Так каждой замкнутой кривой, не проходящей через точку a, сопоставляется целое число – индекс $I(\gamma, a)$ пути относительно точки a. У этого числа есть замечательное выражение, связанное с большей частью нашего курса. Докажите:

$$I(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-a}.$$

4.1. Интегральная формула Коши.

Теорема 4.1. Пусть f голоморфна в области. Точка a лежит в области и γ замкнутый путь в этой области, не проходящий через a и стягиваемый в точку в этой области.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(z)dz}{z-a}=f(a)I(\gamma,a)$$

Доказательство. Определим функцию g как

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

при $z\neq a$ и $f'(a)$ при $z=a$. Эта функция непрерывна в a и голоморфна вне a. Следовательно, по уточненной теореме Коши

$$\int\limits_{\gamma}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz=0$$

А интеграл формы

$$\int\limits_{\gamma}\frac{f(a)}{z-a}dz$$

мы вычислять умеем, он равен $2\pi i f(a)I(\gamma,a)$.

4.2. Разложение в ряд Тейлора.

Теорема 4.2. Голоморфная функция разлагается в степенной ряд в открытом круге голоморфности.

Доказательство. Действительно,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(t)dt}{t-z}$$

γ – окружность, пройденная в положительную сторону. Это интегральное выражение раскладывается в ряд (геометрическая прогрессия):

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t}\frac{1}{1-z/t} = \frac{1}{t}(1+\frac{z}{t}+\frac{z^2}{t^2}+...),$$

и получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\sum z^n\frac{f(t)}{t^{n+1}}dt.$$

Этот ряд нормально сходится при $|z| < r$ поэтому можно интегрировать почленно получаем

$$f(z) = \sum a_n z^n,$$

где

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}\frac{f(t)}{t^{n+1}}dt.$$

4.3. Теорема Морера.

Теорема 4.3. Если функция f непрерывна и форма $f(z)dz$ замкнута, то f голоморфна в области.

Доказательство. Функция f локально обладает примитивной, которая голоморфна, а стало быть и ее производная голоморфна.

4.4. Версия интегральной формулы Коши.

Теорема 4.4. Для голоморфной функции и ориентированной границы компакта:

$$\int_{\partial K} f(z)dz = 0$$

Если точка a лежит внутри компакта, то

$$\int_{\partial K} \frac{f(z)dz}{z-a} = 2\pi i f(a).$$

4.5. Принцип симметрии Шварца. Задача: Пусть есть симметричная относительно действительной оси область и функция f – непрерывная в пересечении области с замкнутой верхней полуплоскостью и голоморфная в пересечении области с открытой верхней полуплоскостью. Тогда f продолжается до голоморфной в области (в часть лежащую в нижней полуплоскости) по формуле $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$

4.6. Неравенство Коши, теорема Лиувилля и основная теорема алгебры.

Итак,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t)dt}{t-z}$$

Где γ граница круга в котором функция голоморфна (мы считаем, что фунция голоморфна в большем открытом круге), пройденная в положительную сторону. При помощи формулы суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t}\frac{1}{1-z/t} = \frac{1}{t}(1 + \frac{z}{t} + \frac{z^2}{t^2} + ...)$$

мы получили:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} \frac{f(t)}{t^{n+1}} dt.$$

Если $|f(z)| \leq M(r)$, на границе круга радиуса r, то получаем оценку

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}.$$

Эту оценку называют неравенством Коши.

Немедленно получаем следствие - Теорема Лиувилля: Ограниченная на комплексной прямой функция постоянна. В самом деле, из этого неравенства Коши вытекает что $|a_n| = 0$ при $n \geq 1$.

Удивительное следствие из этой теоремы: не существует биголоморфного (то есть такого, к которому есть голоморфное обратное) отображения между комплексной прямой $\mathbb{C}$ и открытым диском в $\mathbb{C}$. В самом деле, на диске ограниченные непостоянные голоморфные функции есть, сколько угодно, например просто z. Биголоморфное отображение переводит непостоянную функцию в непостоянную.

Докажем основную теорему алгебры с помощью теоремы Лиувилля: у любого многочлена степени больше нуля есть корень в $\mathbb{C}$. В самом деле, если б нашелся многочлен p без корня, то функция $1/p$ была б ограниченной непостоянной голоморфной функцией (доведите рассуждение до конца).

4.7. Теорема о среднем.

Теорема 4.5. Значение в нуле голоморфной функции есть среднее значение по любой окружности с центром в нуле, такой что весь диск, ограниченный этой окружностью, лежит в области голоморфности.

Доказательство. В самом деле, интегральная формула Коши (или выражение для a_0) для нуля имеет вид:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(t)dt}{t}$$

где γ_r окружность радиуса r, ограничивающая диск радиуса r, весь этот диск лежит в области голоморфности. Подставим параметризацию $re^{i\varphi}$ окружности, получим

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(re^{i\varphi})d\varphi.$$

4.8. Нули.

Теорема 4.6. Нули голоморфной непостоянной функции изолированы.

Доказательство. В самом деле, функция голоморфна и следовательно, как мы видели, раскладывается в степенной ряд в некоторой окрестности любой своей точки z_0

$$f(z) = \sum a_k(z - z_0)^k.$$

Либо f обращается в ноль в некоторой окрестности z_0, либо этот ряд начинается с ненулевого члена и функция f имеет вид

$$(z - z_0)^k(a_k + a_{k+1}(z - z_0) + ...),$$

где $a_k \neq 0$. Следовательно отлична от нуля в некоторой проколотой окрестности точки z_0. Таким образом множество нулей голоморфной в открытом множестве U функции замнкнуто в U, как просто множество нулей непрерывной функции, более того его точки либо изолированы в U, либо внутренние.

Задача 2. Покажите, что множество тех нулей которые внутренние есть объединение компонент связности множества U.

У любого ненулевого комплексного числа $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ есть ровно k корней степени k. Задаются они формулой $\sqrt[k]{r}(\cos(\frac{\varphi}{k} + \frac{2\pi j}{k}) + i\sin(\frac{\varphi}{k} + \frac{2\pi j}{k}))$ при $j = 0, ..., k-1$. Докажите что в любой связной односвязной области $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ есть ровно k непрерывных функций f таких что $f^k(z) = z$. Покажите, что все эти функции голоморфны. Голоморфность доказывается примерно так: функции f обратны к голоморфной функции z^k, а функция обратная к голоморфной является голоморфной. Она вещественно дифференцируема как отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ и ее производная является так-называемым овеществлением оператора умножения на комплексное число - почему? Следовательно она голоморфна.

Рассмотрим голоморфную функцию f. Если она непостоянна ни в какой окрестности точки z_0, то ее ряд Тейлора с центром в z_0 отличен от константы. Покажем, что для непостоянной функции есть такое единственное k, что найдется такая голоморфная функция h что

$$f(z) = f(z_0) + (h(z))^k$$

в некоторой окрестности точки z_0 и $h(z_0) = 0$, но $h'(z_0) \neq 0$. Действительно, разложение Тейлора для $f(z) - f(z_0)$ начинается с ненулевого члена $a(z - z_0)^k$ порядка $k \geq 1$. Функция

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)^k}$$

аналитична там же где и f и не равна нулю в точке z_0. Почему она голоморфна в точке z_0? Образ небольшой окрестности точки z_0 лежит в односвязном множестве, поэтому можно взять композицию одной из ветвей корня k-й степени и получим голоморфную функцию l. Проверьте, что $h(z) = (z - z_0)l(z)$ удовлетворяет условиям теоремы.

4.9. Принцип сохранения области.. Будем говорить, что голоморфная фукция нигде не постоянна если ее ограничение на любое непустое открытое подмножество области определения есть непостоянная функция. Если голоморфная функция нигде не постоянна, то образ открытого множества открыт. Докажите!

4.10. Принцип максимума. Пусть U линейно связное открытое множество, f голоморфна в U и непрерывна в замыкании $\overline{U}$ тогда $|f|$ достигает максимума на ∂U, если максимум модуля $|f|$ достигается в точке множества U, то f постоянна на $\overline{U}$. Легко следует из принципа сохранения области.

5. Лекция пятая. 16 марта

5.1. Лемма Шварца.

Теорема 5.1. Пусть функция f голоморфна в открытом единичном круге $D = \{z||z| < 1\}$. Пусть, кроме того, $|f| < 1$ и $f(0) = 0$. Тогда при любом z из круга $|f(z)/z| \leq 1$. Если где-то в ненулевой точке достигается равенство в этом неравенстве, то $f(z) = kz$ с константой k модуль которой равен единице.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(z)/z$ на замкнутом круге радиуса $r < 1$ с центром в нуле. Тут важно заметить, что она продолжается по непрерывности в ноль и голоморфна в нуле. На границе она не больше $1/r$. Следовательно, на всем этом круге $|f(z)/z| \leq 1/r$. Искомое в лемме неравенство получается предельным переходом. Если где-то в ненулевой точке z_0 есть равенство $|f(z_0)| = |z_0|$, то $f(z)/z$ постоянна во всем круге D, то $f(z)/z = k$.

5.2. Ряды Лорана. Часто приходится рассматривать следующие функции – заданные рядом, но не степенным как мы привыкли, а степенным с ненулевыми коэффициентами при отрицательных показателях степени.

Рассмотрим формальный ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n.$$

Такой ряд называется рядом Лорана.

Что такое его сумма? Нужно разделить его на две части – с неотрицательными показателями степени и с отрицательными показателями. Первый, как мы уже знаем, абсолютно и равномерно сходится в любом компакте лежащем круге $|z| < r_1$ (r_1 – радиус сходимости этого ряда) и является голоморфной функцией в этом открытом круге. Со вторым чуть хитрее – надо рассмотреть $\sum\limits_{n<0} a_n z^n$ и подставить $1/u$ вместо z. Тогда получим голоморфную функцию от переменной u в круге $|u| < R_1$. Стало быть $\sum\limits_{n<0} a_n z^n$ есть композиция этой функции и голоморфного вне нуля отображения $z \to 1/z$. Второй ряд абсолютно и равномерно сходится в любом компакте лежащем в кольце $|z| > r_2 = 1/R_1$ и является голоморфной функцией в этом кольце. Таким образом исходный ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n.$$

абсолютно и равномерно сходится на любом компакте лежащем в кольце $r_2 < |z| < r_1$ к голоморфной функции на этом кольце. Конечно, это имеет смысл только если $r_2 < r_1$.

Говорят, что функция f разлагается в кольце $r_2 < |z| < r_1$ в ряд Лорана если найдется такой ряд Лорана, который сходится в этом кольце (части с отрицательными и неотрицательными показателями сходятся). Можно добавить и о сходимости – абсолютной и равномерной на любом подкомпакте или даже достаточно любом замкнутом подкольце, так как каждый подкомпакт содержится в таком подкольце.

Покажем, что ряд Лорана единственен, если он есть. Действительно – рассмотрим ограничение функции на окружность $|z| = r, r_2 < r < r_1$. Тогда ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n.$$

абсолютно и равномерно сходится на этой окружности, умножив на $e^{-in\varphi}$ и проинтегрировав получаем

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-in\varphi} f(re^{i\varphi})d\varphi$$

так что коэффициенты однозначно заданы функцией.

Теорема 5.2. Любая функция голоморфная в кольце $r_2 < |z| < r_1$ раскладывается в нем в ряд Лорана.

Доказательство. В самом деле, рассмотрим интегральную формулу Коши для чуть уменьшенного кольца, для z лежащих в этом уменьшенном кольце

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \frac{f(t)dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2} \frac{f(t)dt}{t-z}$$

тут γ_1 – внешняя, а γ_2 – внутренняя граница.

В первом из этих интегралов

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{t^{n+1}}$$

и потому

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \frac{f(t)dt}{t-z} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \frac{f(t)dt}{t^{n+1}} z^n$$

Во втором интеграле надо чуть хитрее разобраться с прогрессией

$$\frac{1}{t-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-t/z} = -\sum_{n<0}\frac{z^n}{t^{n+1}}$$

и мы можем заменить на этот ряд. Получаем, что второй интеграл дает нам

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{f(t)dt}{t-z} = \sum_{n<0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2}\frac{f(t)dt}{t^{n+1}}z^n.$$

Мы видим, что голоморфная в кольце $r_2 < |z| < r_1$ функция раскладывается в сумму функции f_1 голоморфной в круге $|z| < r_1$ и в f_2 голоморфной в бесконечном кольце $r_2 < |z|$. Такое разложение не единственно, можно добавить к первой функции z а из второй отнять, например. Если предположить, что f_2 стремится в ноль в бесконечности, то это разложение есть и единственно.

Действительно, ряд Лорана дает такое разложение в сумму двух функций (проверьте!). Для второго такого разложения имеем $f = f_1 + f_2 = g_1 + g_2$. Следовательно: $f_1 - g_1 = g_2 - g_1$ и мы получаем голоморфную функции на всей прямой $\mathbb{C}$ равную в круге $|z| < r_1$ $f_1 - g_1$ и $g_2 - g_1$ в $|z| > r_2$. Она стремится к нулю в бесконечности и следовательно тождественно равна нулю.

5.3. Изолированные особые точки. Пусть функция f определена в проколотом диске $0 < |z| < r$. Оказывается, ее можно продолжить в ноль до голоморфной функции если (и только если) она ограничена в некоторой проколотой окрестности нуля.

Имеем, для коэффициентов ряда Лорана мы видели соотношение:

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-in\varphi} f(re^{i\varphi})d\varphi$$

поэтому если модуль функции ограничен константой C в некоторой проколотой окрестности нуля то

$$|a_n| \geq \frac{C}{r^n}$$

где при отрицательных n получаем $a_n = 0$ и ряд Лорана есть ряд Тейлора.

5.4. Мероморфные функции. Отношение двух голоморфных функций называется мероморфной функцией. Покажите, что в ряду Лорана мероморфной функции есть только конечное число ненулевых членов с отрицательными показателями. Если функция не слишком быстро растет в нуле то она мероморфна (покажите). Полюсом называется особенность мероморфной функции.

Функция называется мероморфной в бесконечности если найдется такое натуральное n и положительные константы C и R, что на окружности произвольного радиуса $R_1 > R$ функция меньше по модулю чем CR_1^n.

5.5. Существенно особые точки. Бывает еще случай функции определенной в проколотой окрестности нуля и такой что в ряде Лорана бесконечное число членов с отрицательным показателем. Такая особая точка называется существенно особой точкой.

Теорема Сохоцкого Вейерштрасса.

Если 0 изолированная существенная особенность функции f, то образ любой проколотой окрестности нуля всюду плотен в $\mathbb{C}$.

Доказательство. От противного – пусть окрестность точки a не пересекается с образом некоторой проколотой окрестности нуля, то есть

$$|f(z) - a| > r$$

при $0 < |z| < \varepsilon$. Рассмотрим функцию

$$\frac{1}{f(z) - a} = g(z).$$

Она, наоборот, ограничена в проколотой окрестности нуля. Как мы знаем такая функция продолжается в ноль до голоморфной функции. Функция

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + a$$

есть отношение двух голоморфных и следовательно мероморфна и следовательно у нее ноль не существенно особая точка. Утверждение доказано.

6. Лекция шестая. 23 марта

6.1. Вычеты. Что такое вычет изолированной особой точки (вне которой форма голоморфна) формы – интеграл формы $\frac{1}{2\pi i}f(z)dz$ по замкнутому пути один раз обходящему вокруг особой точки в положительную сторону. Первое (простое, но очень важное) наблюдение такое: если мы воспользуемся этим определением в "других голоморфных координатах", то увидим, что вычет особой точки не изменится, ведь его определение и не требовало координат. Также это обьясняет, что вычет есть именно у формы, а не у функции – функции и формы на комплексной прямой с координатой z "похожи" – функции $f(z)$ однозначно соответствует форма $f(z)dz$, только это соответствие зависит от координаты z.

Покажите, что вычет равен коэффициенту

$$a_{-1}$$

ряда Лорана функции $f(z)$. (Все остальные члены дают ноль). Вычет точки z_0 обозначим как

$$Res(f, z_0).$$

6.2. Теорема о вычетах. В $\mathbb{C}$. Пусть f голоморфна в открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$ за исключением изолированных особенностей.

Пусть $K \subset U$ – компакт с достаточно хорошей границей Γ и пусть Γ не задевает особенности функции f.

Тогда число особых точек в K конечно и

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum Res(f, z_k).$$

6.3. Сфера Римана. Сфера Римана – первый пример компактного одномерного комплексного многообразия. Комплексные многообразия это многообразие, карты которого суть открытые подмножества $\mathbb{C}^n$, а функции перехода голоморфны. В случае сферы Римана удобно рассматривать атлас, состоящий из двух карт – каждая карта есть комплексная прямая $\mathbb{C}$ – одна с координатой z, другая с координатой w – а функция перехода задана как $w = 1/z$.

Задача. А если функция перехода $w = 2/z$, то полученное комплексное многообразие будет "биголоморфно эквивалентно" сфере Римана?

Другой пример комплексного компактного многообразия это эллиптическая кривая, которую проще всего определить как фактор $\mathbb{C}$ по абелевой подгруппе (по сложению), изоморфной $\mathbb{Z}^2$. С эллиптическими кривыми мы ближе познакомимся позже.

6.4. Вычет в бесконечности.. Голоморфность формы, а следовательно особые точки и вычеты определены на любом одномерном комплексном многообразии.

Для определения вычета в бесконечности сделаем замену $z = 1/w$, получим

$$f(z)dz = -\frac{1}{w^2} f(\frac{1}{w})dw$$

и по определению положим вычет в бесконечности равным вычету в нуле формы $-\frac{1}{w^2}f(\frac{1}{w})dw$.

Покажите, что теорема о вычетах справедлива и в сфере Римана. В частности, если наше множество U есть вся сфера, то у нее нет границы и левая часть равенства обнуляется

$$0 = \sum Res(f, z_k).$$

Получаем, что сумма всех (конечно включая вычет в бесконечности) вычетов функции с изолированными полюсами на сфере Римана равна нулю.

Теорема о вычетах поможет нам считать много определенных интегралов. Сначала надо научиться считать вычеты. Лучше всего это (учиться) делать на частных примерах. Если $f = \frac{p}{q}$ и нуль z_0 фунции q прост, как часто бывает, то вычет функции f в особой точке z_0 равен

$$\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

6.5. Логарифмический вычет. До перехода к вычислению интегралов типа

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)dx}{x^4+1},$$

сделаем простое, красивое и важное вычисление. Логарифмической производной фунции f называют выражение

$$\frac{f'}{f},$$

совпадающее с производной композиции логарифма и функции f для вещественных функций (там где они положительны). В комплексной области логарифм многозначен, а вот его производная однозначна (подумайте почему). И производная функции $ln(f)$ задается приведенной формулой. Где будут особые точки логарифмической производной мероморфной функции? там где у самой функции нули и полюса. Проверьте что в нулях функции f кратности k вычет логарифмической производной как раз равен k, а в полюсах кратности k равен $-k$.

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)} = Z - P,$$

где Γ ориентированная граница достаточно хорошего компакта как и раньше, Z – число нулей функции f с кратностями, P – число ее полюсов с кратностями.

6.6. Принцип аргумента. Объясним при чем тут логарифм. Что такое логарифм? Это обратная функция к экспоненте

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Конечно, никакой обратной функции быть не может, поскольку экспонента периодична. Но есть многозначная функция, значение которой в каждой ненулевой точке определено с точностью до $2\pi i\mathbb{Z}$:

$$\mathrm{Ln}(z) = \log|z| + i\mathrm{arg}(z).$$

Это не очень страшно: если есть путь

$$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}\setminus\{0\},$$

то можно выбрать непрерывную функцию $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$, что

$$\gamma(t) = e^{f(t)}.$$

Более того, такой выбор единственен с точностью до добавления константы из $2\pi i\mathbb{Z}$. Кроме этого экспоненту можно обратить локально (докажите).

Хоть логарифм и неоднозначен, его дифференциал (и производная) однозначные объекты, дифференциал константы (равной $2\pi ik$) равен нулю. Главное для нас сейчас наблюдение (утверждение) есть следующее равенство:

$$d\mathrm{Ln}(z) = \frac{dz}{z}.$$

Выберем локальное обращение экспоненты которое тоже будем обозначать Ln. Имеем

$$e^{\mathrm{Ln}(z)} = z$$

при всех z из окрестности фиксированной ненулевой точки. Дифференцируя, получаем

$$z(\mathrm{Ln}(z))' = 1.$$

Таким образом,

$$(\mathrm{Ln}(z))' = \frac{1}{z}.$$

Задача 3. Придумайте геометрическое доказательство равенства $d\mathrm{Ln}(z) = \frac{dz}{z}$.

Следовательно,

$$\frac{f'(z)}{f(z)}dz = d(\mathrm{Ln} \circ f)(z).$$

Откуда, используя то, что

$$\mathrm{Ln}(z) = \log|z| + i\arg(z),$$

получаем, что интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)},$$

вдоль пути γ равен приращению любой непрерывной ветви многозначной функции $\frac{1}{2\pi i}Ln \circ f$. По замкнутому пути это приращение равно деленному на 2π приращению аргумента – приращение мнимой части равно нулю!

6.7. Теорема Руше. Пусть функции f и g голоморфны в компакте K с достаточно хорошей границей. На которой при всех x верно неравенство

$$|f(x)| > |g(x)|.$$

Тогда число нулей (с кратностями) в K для f такое же как это же число для $f+g$.

Эту теорему можно доказать исходя из непрерывности (при $t \in [0,1]$) интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K} \frac{(f'+tg')(z)dz}{(f+tg)(z)},$$

значение которого есть целое число, равное числу нулей с кратностями функции $f+tg$.

7. Лекция седьмая. 30 марта

Интегралы и вычеты.

Мы рассмотрим разные интегралы, в вычислении которых основную роль играет теорема о вычетах. Вторичную и часто совсем непростую роль играет выбор контура (так, классически принято называть путь интегрирования на комплексном одномерном (в нашем случае) многообразии) интегрирования — у исходного интеграла он не является границей, также иногда приходится интегрировать не совсем исходную функцию.

1. Рассмотрим интеграл рациональной функции

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

P, Q – многочлены. Мы будем считать, что у P и Q нет общих корней. Чтобы этот интеграл сходился необходимо и достаточно чтобы у многочлена Q не было действительных корней и выполнялось неравенство

$$\deg P + 1 < \deg Q.$$

Классически принято с этим интегралом поступать так. Рассмотрим

$$\int\limits_{-R}^{+R} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

и замкнем этот отрезок полуокружностью γ_R, лежащую в верхней полуплоскости. Ориентируем этот контур как границу полудиска. При большом R все полюса лежащие в верхней полуплоскости попадут внутрь полудиска. Интеграл по его диаметру стремится к искомому значению. Покажем, что

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\gamma_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz=0.$$

Из этого сразу следует, что искомый интеграл равен

$$2\pi i\sum Res(\frac{P}{Q},z_k)$$

где суммирование распространено на все полюса лежащие в верхней полуплоскости. Интеграл по полуокружности

$$\int\limits_{\gamma_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz$$

равен интегралу

$$\int\limits_0^\pi\frac{P(Re^{i\varphi})}{Q(Re^{i\varphi})}Re^{i\varphi}id\varphi$$

и его модуль оценивается так:

$$|\int\limits_0^\pi\frac{P(Re^{i\varphi})}{Q(Re^{i\varphi})}Re^{i\varphi}id\varphi|\le\int\limits_0^\pi|\frac{P(Re^{i\varphi})}{Q(Re^{i\varphi})}Re^{i\varphi}i|d\varphi\le\int\limits_0^\pi\frac{C}{R^2}Rd\varphi=C\pi/R,$$

для подходящей положительной константы C. Если мы замкнем полуокружностью в нижней полуплоскости, то наш интеграл окажется равен

$$-2\pi i\sum Res(\frac{P}{Q},z_k)$$

где суммирование распространено на все полюса лежащие в нижней полуплоскости (почему минус?).

Для этого интеграла можно было не переходить к пределу, а рассмотреть нашу форму на сфере Римана и доказать (как?) что она продолжается голоморфно (а не мероморфно) в бесконечность. Так что, добавив к исходному контуру $\mathbb{R}$ одну точку ∞, получим замечательный компактный контур – границу полусферы, по которой надо проинтегрировать форму без особенностей на этой границе.

Мы продолжаем обсуждать интегралы, следующий "тип"

2. Интеграл

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx$$

для рациональной функции R без полюсов на окружности $x^2 + y^2 = 1$. Запараметризуем окружность при помощи комплексной экспоненты. Получим, что наш интеграл равен интегралу от рациональной функции

$$Q(z) = (1/iz)R(\frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}), \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}))$$

по единичной окружности в комплексной прямой. А этот интеграл равен $2\pi i$ умножить на сумму вычетов Q по всем полюсам в единичном круге. Вычислите, например, интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - \cos x}.$$

3. Следующий часто встречающийся тип интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx,$$

отметим сразу, что часто встречается его действительная или мнимая часть. Пусть f определена в верхней полуплоскости без конечного множества точек и голоморфна там (пусть на действительной оси нет особенностей). Рассмотрим такой контур – граница полукруга, ориентированная в положительную сторону: полуокружность (окружности радиуса r с центром в нуле) $S(r)$ в верхней полуплоскости и отрезок вещественной оси $[-r, r]$. И мы хотим, чтобы при росте r интеграл от $f(z)e^{iz}dz$ по полуокружности $S(r)$ стремился к нулю. Докажем, что это так если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$ (стремление к бесконечности только по верхней полуплоскости). Имеем:

$$\int\limits_{S(r)} f(z)e^{iz}dz = \int\limits_{0}^{\pi} f(re^{it})e^{ire^{it}}de^{it}.$$

А модуль интеграла соответственно оценивается так:

$$\Big|\int\limits_{S(r)} f(z)e^{iz}dz\Big| \leqslant \int\limits_{0}^{\pi}\Big|f(re^{it})e^{ire^{it}}ire^{it}\Big|dt = \int\limits_{0}^{\pi}\Big|f(re^{it})e^{ire^{it}}r\Big|dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi}\Big|f(re^{it})\Big|\Big|e^{ir(\cos t + i\sin t)}\Big|rdt \leqslant \int\limits_{0}^{\pi} M(r)e^{r(-\sin t)}rdt.$$

Тут $M(r)$ это максимум модуля фунции f по полуокружности $S(r)$. Покажем, что интеграл $\int\limits_0^\pi e^{-r\sin t} r dt$ оценивается сверху независящей от r константой. Делается это, скажем, так:

$$\int\limits_0^\pi e^{-r\sin t} r dt = 2\int\limits_0^{\pi/2} e^{-r\sin t} r dt \leqslant 2\int\limits_0^{\pi/2} e^{-rt/4} r dt,$$

так как $\sin t \geqslant t/4$ на $[0, \pi/2]$ (тут можно взять хоть $t/100$ вместо $t/4$). Последний интеграл можно явно взять:

$$\int\limits_0^{\pi/2} e^{-rt/4} r dt = -4e^{-rt/4}\Big|_{t=0}^{t=\pi/2},$$

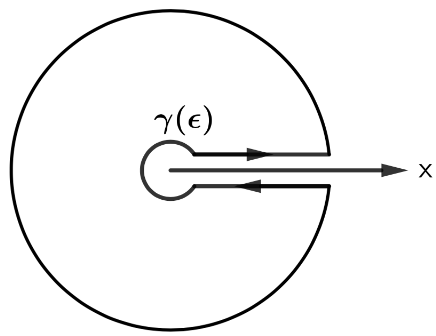
в нем сокращается “большой” множитель r и он уже не больше четырех. Таким образом, если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$ и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$ сходится, то он равен $2\pi i$ умножить на сумму вычетов $f(z)$ в верхней полуплоскости. Вычислите интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{1+x^2}.$$

4. Сейчас мы обсудим интеграл вида:

$$\int\limits_0^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha} dx,$$

пусть R рациональная функция, стремящаяся к нулю в бесконечности, не имеющая особенностей на действительной оси, а число α находится между нулем и единицей. Из этих условий вытекает, что интеграл сходится. Для вычисления этого интеграла рассмотрим контур, схематично изображенный (отрезки проходящие дважды можно считать геометрически совпадающими) на рисунке.



Интегралы по большой $\gamma(r)$ и маленькой $\gamma(\varepsilon)$ окружности стремятся к нулю (докажите). Интеграл по отрезку $[\varepsilon, r]$ встречается в интеграле по всему контуру дважды — один раз мы идем в сторону возрастания $|z|$ и интегрируем $\frac{R(x)}{x^\alpha}$, второй раз мы идем в противоположную сторону, но и интегрируем другую непрерывную ветвь $\frac{R(x)}{x^\alpha}$, поскольку сделали один оборот в положительную сторону вокруг нуля. z^α умножается на $e^{2\pi i\alpha}$ при повороте вокруг нуля на $+2\pi$. Значит

$$(1 - e^{-2\pi i\alpha}) \int\limits_0^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha} dx = 2\pi i \sum res(\frac{R(x)}{x^\alpha}).$$

Один минус из-за противоположного направления в интеграле, второй из-за деления на z^α. Найдите

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}.$$

5. Следующий интеграл

$$\int\limits_0^\infty R(x)\ln x dx.$$

Где функция R рациональна и пусть она не имеет особенностей на луче интегрирования. Чтобы интеграл сходился потребуем, чтобы $\lim\limits_{z\to\infty} zR(z) = 0$ (почему такое условие?). Если мы опять рассмотрим тот же контур, что и выше, и будем интегрировать $R(z)\ln z dz$, то часть с логарифмическим множителем сократится и нужный интеграл не получится вычислить (а получится вычислить другой интеграл – какой и как?). Поэтому надо интегрировать форму $R(z)\ln^2 z dz$ по этому контуру. Покажите, что интегралы по большой $\gamma(r)$ и маленькой $\gamma(\varepsilon)$ окружности стремятся к нулю. Остается в равенстве, полученном из теоремы Коши предельным переходом:

$$-\int\limits_0^\infty 4\pi i R(x)\ln x dx + \int\limits_0^\infty 4\pi^2 R(x) dx = 2\pi i \sum res(R(z)\ln^2 z).$$

Тут два интеграла, но если функция R действительна, то быстро получаем ответ:

$$\int_0^\infty 4\pi i R(x)\ln x dx = -(1/2)Re\sum res(R(z)\ln^2 z).$$

Мы рассмотрели самые простые типы интегралов и не все. Особенности могут быть на вещественной оси или возникать при аналитическом продолжении. Иногда нужно модифицировать контур.

8. Лекция восьмая. 6 апреля

8.1. Автоморфизмы комплексной прямой, круга и сферы Римана.

Как мы уже видели комплексная прямая $\mathbb{C}$ и открытый круг это разные комплексные многообразия. В самом деле, на комплексном круге много голоморфных непостоянных функций, а на прямой их нет. Сейчас мы изучим автоморфизмы (то есть голоморфные обратимые отображения) $\mathbb{C}$ в себя и докажем еще раз, что это разные многообразия.

Группа автоморфизмов $\mathbb{C}$ состоит из аффинных преобразований

$$z \mapsto az + b,$$

причем $a \neq 0$.

Докажем это. Рассмотрим автоморфизм $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Бесконечно удаленная точка на сфере Римана не может быть существенно особой точкой для f, так как образ любой проколотой окрестности существенно особой точки должен быть всюду плотен, а для автоморфизма этого не может быть. Следовательно, функция f является многочленом (почему?). Это может быть только многочлен первой степени – многочлены другой степени не могут быть автоморфизмами.

Автоморфизмы сферы Римана. Автоморфизмы сферы Римана это дробно-линейные преобразования $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$. В самом деле, каждое такое непостоянное отображение это автоморфизм сферы Римана и такие автоморфизмы образуют группу относительно композиции. Любой автоморфизм это композиция некоторого автоморфизма, оставляющего неподвижной бесконечно-удаленную точку, и дробно-линейного отображения. Автоморфизмы, оставляющие неподвижной бесконечно-удаленную точку мы уже знаем – это аффинные преобразования (частный случай дробно-линейных). Следовательно, автоморфизм сферы Римана есть композиция дробно-линейного отображения и аффинного, а это есть дробно-линейное отображение.

Изучим теперь автоморфизмы единичного круга $D = \{z||z| < 1\}$. Для начала рассмотрим автоморфизмы, сохраняющие ноль. Покажем, что это только повороты $f(z) = az$, $|a| = 1$. Действительно, по лемме Шварца $|z| \leqslant |f(z)|$ при всех z в круге D. С другой стороны, из утверждения леммы Шварца для обратного отображения f^{-1} получаем $|z| \geqslant |f(z)|$ при всех $z \in D$. Значит $|f(z)| = |z|$ и (из той же леммы Шварца) $f(z) = az$, $|a| = 1$. Докажите теперь, что группа всех автоморфизмов круга состоит из (только из) отображений вида

$$e^{i\varphi}\frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z},$$

где $\varphi \in [0, 2\pi[$, $|z_0| < 1$. Заметим, что ряд такого отображения в нуле начинается с

$$e^{i\varphi}(z + z_0)(1 - \bar{z}_0 z) = e^{i\varphi}z_0 + z(e^{i\varphi})(1 - \bar{z}_0 z_0) + ...$$

Его производная не больше 1.

Задача 4. Найдите автоморфизмы верхней полуплоскости.

8.2. Теорема Римана. План доказательства.

Мы будем доказывать следующую теорему: пусть есть область U (открытое подмножество прямой) в $\mathbb{C}$ которая связна, односвязна и отлична от $\mathbb{C}$. Тогда эта область изоморфна открытому диску D. Очень краткий план доказательства таков: мы покажем, что теорему достаточно показать для ограниченных областей, содержащихся в единичном круге, и содержащих ноль – $0 \in U \subset D$. Рассмотрим множество всех однолистных голоморфных функций на U (функция однолистна, если значения в разных точках разные), принимающих значения в D. Мы покажем, что среди этих функций можно найти функцию с максимальным по модулю значением производной в нуле. Эта экстремальная функция осуществит искомый изоморфизм.

8.3. Непрерывные и голоморфные функции.

Для реализации этого плана нам понадобятся следующие топологические рассуждения. Нам понадобится пространство $C = C(U)$ непрерывных комплекснозначных функций в области U. Будем говорить, что последовательность (f_n) функций из $C(U)$ сходится, если равномерно сходится ее ограничение на любой компакт, лежащий в U. Проверьте, что (поточечный) предел в случае сходимости также является непрерывной функцией, то есть лежит в $C(U)$.

В линейном пространстве $C(U)$ лежит подпространство $H(U)$ голоморфных функций. Покажем, что это замкнутое подпространство, относительно рассмотренной сходимости, то есть если голоморфные функции f_n сходятся равномерно на любом компакте к функции f, то их предел является голоморфной функцией. В самом деле, нужно показать, что форма $f(z)dz$ замкнута, а это будет следовать из того, что ее интеграл по (границе) прямоугольнику равен нулю, но на этой границе f есть равномерный предел функций f_n для которых интеграл формы $f_n(z)dz$ равен нулю. Значит форма $f(z)dz$ замкнута, а значит f голоморфна.

Следующий замечательный факт таков: предел голоморфных функций можно дифференцировать: если $\lim f_n = f$, то последовательность f_n' сходится и $\lim f_n' = f'$. Это вытекает из того, что для f' есть интегральная формула, содержащая f, а именно

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(t)dt}{t - z},$$

где γ_r окружность радиуса r, при всех z в круге меньшего радиуса чем r с тем же центром, что и γ_r, по формуле Коши. Дифференцируя получаем

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(t)dt}{(t - z)^2}.$$

Значит, если $f_n \to f$, то для данного компакта $K \subset U$ его можно покрыть конечным числом меньших кругов так что покрытие большими кругами, ограниченными окружностями γ_r все еще содержится в U. В этих меньших кругах сходимость производной есть и равномерная. Следовательно, она есть и на K.

8.4. Однолистные функции.

Будем считать, что область U связна. Рассмотрим сходящуюся последовательность голоморфных функций (f_n). Пусть все функции из этой последовательности были однолистны. Покажем, что предельная функция f или постоянна или однолистна. Пусть f непостоянна и значение a оно принимает не меньше двух раз в точках z_1, z_2. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_r}\frac{f'(t)dt}{f(t)} \geqslant 2$$

∂U_r граница кругов достаточно малого радиуса r с центрами z_1, z_2. Следовательно, поскольку $f'_k \to f'$ и $f'_k/f_k \to f'/f$ на ∂U_r, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial U_r}\frac{f'_n(t)dt}{f_n(t)} \geqslant 2,$$

при больших n, а следовательно f_n не однолистна. Противоречие.

8.5. Метрика на $C(U)$.

Последовательность вложенных друг в друга компактов $K_i \subset U, K_i \subset K_{i+1}$ называется исчерпывающей, если любой подкомпакт области U вложен в компакт из этой последовательности с достаточно большим номером. Исчерпывающая последовательность существует: упорядочим как-то замкнутые шары с рациональными центрами и положительными рациональными радиусами, лежащими в U. Компакт K_i есть объединение первых i шаров (докажите, что эта последовательность в самом деле исчерпывающая). Зафиксируем какую-то исчерпывающую последовательность компактов.

Для непрерывной функции f положим $s_i(f) = \max_{z \in K_i} |f(z)|$ и определим

$$d(f) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (1/2^k) \min(s_k(f), 1).$$

Положим $\rho(f,g) = d(f-g)$. Тогда ρ является метрикой. Неравенство треугольника для ρ следует из неравенства

$$d(f+g) \leqslant d(f) + d(g),$$

которое в свою очередь вытекает из $s_i(f+g) \leqslant s_i(f) + s_i(g)$. Сходимость в таким образом метризованном пространстве непрерывных функций эквивалентна равномерной сходмости на компактах (докажите).

9. Лекция девятая. 13 апреля

9.1. Ограниченность.

Множество функций называется ограниченным, если модуль ограничения на произвольный компакт $K \subset U$ ограничен константой $M(K)$ ($A \subset U$ ограничено, если для любого компакта $K \subset U$ есть такое число $M(K) \in \mathbb{R}_+$, что $|f(z)| < M(K)$ при любых $f \in A$ и $z \in K$). При этом функции из A могут и не быть ограниченными (A открыто). Отметим, что эта ограниченность вовсе не совпадает с ограниченностью в метрике ρ, в этой метрике все множества ограничены.

Оказывается, для подмножеств пространства голоморфных функций компактность равносильна ограниченности и замкнутости. Сейчас мы это докажем. Если подмножество в пространстве непрерывных функций компактно, то оно, очевидно, замкнуто. Образ компакта при отображении $f \mapsto \sup_{z \in K} |f(z)|$ компакт в $\mathbb{R}$ — следовательно компакт ограничен. Для справедливости обратного утверждения существенна голоморфность, а для подмножеств непрерывных функций компактность вообще говоря (приведите пример) не вытекает из ограниченности и замкнутости. Итак, докажем, что если подмножество пространства $H(U)$ ограничено и замкнуто, то оно компактно.

Мы будем доказывать, что из любой последовательности в ограниченном и замкнутом множестве голоморфных функций можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

9.2. Сходимость в круге.

Покажем, для начала, что для последовательности голоморфных функций в открытом круге из ограниченного множества сходимость (равномерно на любом компакте в этом круге) эквивалентна сходимости каждой производной в центре этого круга. В одну сторону мы это уже доказали – из равномерной сходимости на любом компакте голоморфных функций вытекает и равномерная сходимость на любом компакте их производных. Значит в центре круга сходится последовательность любой производной. Остается показать обратное утверждение.

Достаточно рассмотреть случай круга с центром в нуле. Пусть

$$f_k(z) = \sum a_{n,k} z^n$$

тейлоровские разложения этих функций. Напомним, что $|a_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}$, где $M(r)$ верхняя грань модуля функции $\sum a_n z^n$ на окружности радиуса r. Поскольку функции последовательности были из ограниченного множества, то найдется такая константа C, что

$$|f_k(z)| \leqslant C$$

при всех k и $|z| < r_0$. Следовательно, внутри круга с центром в нуле и радиуса r меньше r_0 справедлива оценка

$$|f_m(z) - f_n(z)| \leqslant \sum_{i=0}^{p} |a_{i,m} - a_{i,n}| r^i + 2C \sum_{i=p+1}^{\infty} (r/r_0)^i.$$

Эти две величины (суммы) можно сделать меньше ε выбрав сначала p достаточно большим, а потом m, n достаточно большим. Следовательно f_k равномерно сходится на каждом замкнутом круге (радиуса r), лежащем в исходном открытом круге.

9.3. Завершение доказательства компактности.

Пусть f_n ограниченная последовательность голоморфных на U функций. Выберем счетное множество открытых кругов с центрами z_i так, что их объединение есть U. Каждой точке z_i и числу $n \in \mathbb{Z}_+$ сопоставим отображение, переводящее функцию f в число $f^{(n)}(z_i)$. Этих отображений счетное число, пронумеруем их натуральными числами: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Выберем бесконечное подмножество $A_1 \subset \mathbb{N}$ по которому сойдется α_1, выберем потом бесконечное подмножество $A_2 \subset A_1$ по которому сойдется α_2, итд. Пусть теперь i-й номер подпоследовательности есть i-й элемент множества A_i. Так мы построили подпоследовательность, которая сходится (проверьте).

9.4. Доказательство теоремы Римана.

Рассмотрим связную односвязную область $U \subset \mathbb{C}$, отличную от всей прямой. Параллельным переносом переведем ее в область, не содержащую ноль. В получившейся области есть однозначная непрерывная ветвь логарифма. Взяв любую такую ветвь ln и зафиксировав ее применим ее к области получим не всюду плотное множество (если образ содержит точку a, то он не содержит точек $a + 2\pi ik, k \neq 0$ и их окрестностей). Значит, любая функция $\frac{1}{\ln(z+b)-a+2\pi ik}$ (с подходящим образом подобранными b и a) голоморфно и однозначно переведет U в ограниченное множество, обратное отображение тоже голоморфно.

Поэтому будем считать, что наше множество U ограничено, содержится в единичном круге и содержит ноль.

Рассмотрим множество A голоморфных функций f на U, переводящих ноль в ноль ($f(0) = 0$) и U в подмножество единичного диска D (то есть $|f(z)| < 1$ при всех $z \in U$) и однолистных на U, а также удовлетворяющих условию $|f'(0)| \geq 1$.

Это множество, во-первых, ограничено, так как $|f(z)| < 1$ при всех $z \in U$. Во-вторых, оно непусто – в нем есть функция z. В-третьих, оно замкнуто – действительно, предел (последовательности функций) f удовлетворяет $f(0) = 0$ и однолистен потому что в нуле у предела производная ненулевая, так как ее модуль не меньше единицы. Модуль предельной функции не принимает значения 1, потому что он был бы в этом случае постоянен на U, а $f(0) = 0$.

Таким образом, наше множество A функций компактно. Функция $f \to |f'(0)|$ непрерывна на нем (почему?), поэтому есть функция с максимальным значением модуля прозводной. Покажем, что эта функция биголоморфно переводит U в единичный диск D.

Пусть образ области U под действием $f \in A$ ($f(0) = 0$) не содержит точку $a \in D$. Нам надо показать, что можно найти такую функцию $f_1 \in A$, что $|f_1'(0)| > |f(0)|$. Это делается явной конструкцией, которую мы сейчас опишем. Можно считать (без ограничения общности), что a вещественное положительное число. Рассмотрим функцию

$$\frac{f(z) - a}{1 - af(z)}$$

которая является композицией $g_a \circ f$ функции f и автоморфизма g_a круга D, переводящего a в ноль. Она переводит U биголоморфно в подобласть единичного диска, не содержащую нуля. Поскольку эта подобласть односвязна (как и U), то на ней есть однозначная непрерывная ветвь логарифма (возьмем любую), так что образ $l = \ln \circ g_a \circ f$ лежит в левой полуплоскости. Функция $F(z) = \frac{l(z) - l(0)}{l(z) + \overline{l(0)}}$ по прежнему голоморфна, однолистна и переводит 0 в 0 (почему?). Кроме этого, она переведет U в подмножество D.

Отношение модулей производных в нуле $|F'(0)|/|f'(0)|$ можно вычислить (сделайте это), оно равно

$$\frac{1 - a^2}{2a \ln(1/a)}.$$

Остается показать, что это число больше 1 при $a \in]0, 1[$. Это равносильно тому, что

$$\frac{1 - a^2}{a} + 2 \ln a$$

положительно на интервале $]0, 1[$. Продифференцируем и получим $-\frac{1}{a^2} + 2\frac{1}{a} - 1 = -(\frac{1}{a} - 1)^2$. Эта функция отрицательна на интервале $]0, 1[$. Следовательно, $\frac{1-a^2}{a} + 2 \ln a$ убывает на интервале до значения в единице, которое равно нулю. Поэтому на всем интервале величина положительна. Это заканчивает доказательство теоремы Римана.

10. Лекция десятая. 14 апреля

10.1. Гармонические функции. Гармонической функцией будем называть такую бесконечногладкую (и вообще говоря комплексно-значную) функцию f, заданную на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, что $\Delta f = 0$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа. Это определение удручающе зависит от координат. Пока у нас и примеров-то нет, кроме $1, x, y, x^2 - y^2,$. Попробуйте доказать, скажем, что функция $\ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ гармонична. Впрочем, примеры сейчас появятся.

10.2. Гармонические и голоморфные функции. Вспомним, что

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}),$$

получим $\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$. Откуда любая голоморфная (как и антиголоморфная) функция гармонична, ибо голоморфная функция f лежит в ядре оператора $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, а следовательно в ядре оператора Лапласа.

Отметим, что функция является гармонической тогда и только тогда, когда ее вещественная и мнимая части гармоничны. Это дает нам много примеров вещественнозначных гармонических функций. Оказывается, этими примерами по сути исчерпываются все гармонические функции. Докажем это.

Итак, – пусть есть вещественнозначная гармоническая функция g в связной односвязной области Ω. Тогда она является вещественной частью некоторой голоморфной функции f, определенной с точностью до константы однозначно. Докажем это.

Рассмотрим дифференциальную форму

$$2\frac{\partial g}{\partial z}dz.$$

Эта форма замкнута, а следовательно в односвязной области имеет первообразную f (которая будет искомой голоморфной функцией f). Поскольку $2\frac{\partial g}{\partial z}dz = df$, следовательно $2\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}}d\bar{z} = d\bar{f}$ (почему?) и мы получаем

$$d(f + \bar{f}) = 2dg.$$

Следовательно, вещественная часть фунции f равна g с точностью до константы. Если существует другая голоморфная функция f_1, вещественная часть которой равна g, то эта функция отличается от нашей на константу, поскольку вещественная часть $f - f_1$ равна нулю, а это бывает только если $f - f_1$ чисто мнимая константа по принципу сохранения области.

10.3. Теорема о среднем для гармонических функций. Для голоморфной функции справедлива теорема о среднем – значение голоморфной функции в центре круга равно среднему по границе круга. Следовательно, утверждение теоремы о среднем верно и для вещественной и мнимой части этой функции, а следовательно и для любой вещественнозначной гармонической функции. А следовательно и для любой комплекснозначной гармонической функции.

10.4. Принцип максимума для гармонических функций.

10.5. Аналитичность.

10.6. Формула Пуассона. Если голоморфная функция f задана рядом $\sum a_n z^n$, то ее вещественная часть раскладывается в ряд

$$g(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2}\sum a_n r^n e^{in\varphi} + \bar{a_n} r^n e^{-in\varphi},$$

который равномерно сходится при r меньше радиуса сходимости исходного ряда. Будем считать a_0 вещественным числом. Тогда получим что

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\varphi})d\varphi$$

и при натуральных n

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\varphi}) r^n e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Таким образом, коэффициенты ряда Тейлора голоморфной функции даются интегральными формулами в которых участвует только ее вещественная часть. Подставляя их в ряд для f, видим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\varphi})(1 + 2\sum_{n\geq 1} z^n r^{-n} e^{-in\varphi})d\varphi,$$

где $|z| < r$.

Множитель $1 + 2\sum\limits_{n\geq 1} z^n r^{-n} e^{-in\varphi}$ равен

$$\frac{re^{i\varphi} + z}{re^{i\varphi} - z},$$

и называется ядром Пуассона (1781-1840). Таким образом имеем две интегральные формулы –

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\varphi})\frac{re^{i\varphi}+z}{re^{i\varphi}-z}d\varphi$$

и ее вещественную часть

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(re^{i\varphi})\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\varphi}-z|^2}d\varphi$$

10.7. Задача Дирихле. Задача Дирихле – это задача о восстановлении гармонической в области функции по граничной функции.

Решение задачи Дирихле для круга при условии непрерывности граничной функции легко угадать при помощи формулы Пуассона. Положим

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{r^2-|z|^2}{|re^{i\varphi}-z|^2}d\varphi$$

для непрерывной функции f на окружности. Покажем, что эта функция гармонична внутри открытого круга радиуса r и стремится к $f(\varphi)$ при $z \to re^{i\varphi}$ внутри открытого круга радиуса r.

После того, что формула выписана ее не трудно доказать.

Во-первых эта функция гармонична внутри круга,. Потому что она вещественная часть голоморфной, заданной интегралом, который можно дифференцировать.

Эта функция стремится к f.

Дело тут в поведении (вещественной части) ядра Пуассона. Рассмотрим вещественную часть ядра Пуасссона

$$\frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\varphi} - z|^2}$$

при каждом z ($|z| < r$) это функция на окружности. Как себя ведет это ядро при $z \to re^{i\varphi_0}$? Оказывается, это "дельта-образное"семейство. А именно ядро Пуассона вне любой (фиксированной) окрестности точки φ_0 ядро Пуассона положительно, мало, когда z достаточно близко к $re^{i\varphi_0}$, и его интеграл по всей окружности равен единице. Полезная физическая аналогия – рассмотреть распределенную единичную массу на окружности, распределение зависит от z и при $z \to re^{i\varphi_0}$ стремится к единичной массе, сосредоточенной в точке $re^{i\varphi_0}$

11. Лекция одиннадцатая. 27 апреля

11.1. Комплексные многообразия, ориентируемость. Поговорим немного о комплексных многообразиях и только одномерных (больше мы не успеем). Надеюсь, что само понятие многообразия уже известно (а если нет, то самое время его узнать, или можно перейти чуть вперед). Мы имели дело пока с комплексной прямой, иногда с проколотой в нескольких точках комплексной прямой, диском. Сейчас мы немного продвинемся вперед. Отметим, для начала, что комплексное многообразие, рассматриваемое как вещественное многообразие, ориентируемо (докажите это простое утверждение) – ленту Мебиуса, бутылку Клейна, проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$ не встретить среди комплексных многоообразий. Сегодня выглядит достаточно естественным ограничение, накладываемое при первом знакомстве с комплексными многообразиями, – компактность, многообразия для начала изучают замкнутые (компактные и без края). Компактные вещественные ориентируемые многообразия топологически (с точностью до гомеоморфизма) и даже гладко (с точностью до диффеоморфизма) характеризуются одним целым неотрицательным параметром – числом ручек, он же называется родом. Бывает сфера, тор, крендель... – сфера с g ручками. Если мы изучаем мир комплексных многообразий, то ситуация драматически меняется – только многообразия рода ноль, сферы, одинаковы и этот факт является непростой теоремой, которую мы не будем доказывать – уже для многообразий рода 1 это совсем не так: если вы возьмете два случайных комплексных тора, то они кажутся разными комплексными многообразиями.

Нас интересуют функции на многообразиях. Голоморфные функции это функции (отображения в $\mathbb{C}$) диффенцируемые на своей области определения. Кажется естественным изучать дифференцируемые функции на многообразии. На замкнутом связном многообразии такие функции очень удобно изучать, потому что других голоморфных функций кроме констант там нет – на компактном многообразии достигается максимум модуля непрерывной функции, в окрестности которого, а значит и везде, функция постоянна. Мы будем (увы, совсем немного) изучать голоморфные отображения в сферу Римана $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Иначе говоря, такое отображение есть самая настоящая голоморфная функция f (отображения в $\mathbb{C}$) на $M \setminus \{z_1, .., z_n\}$ (эти точки и их число разные для разных функций), причем в каждой точке z_k у f есть предел и равен бесконечности (то есть существенные особенности запрещены). Напомню, что рациональные функции на сфере Римана описываются очень просто (подумайте еще раз почему) – это только рациональные функции в $\mathbb{C}$.

11.2. Функция Вейерштрасса. Рассмотрим в $\mathbb{C}$ (как в группе по сложению) двумерную решетку Λ у которой есть два образующих, два числа α и β

$$\Lambda = \{m\alpha + k\beta | m, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Эти образующие, конечно, не единственны. Факторпространство $\mathbb{C}/\Lambda$ это одномерное комплексное многообразие рода 1, тор. Функции на этом торе это так называемые двояко-периодические функции (два от размерности решетки), их можно поднять на $\mathbb{C}$, где они превращаются в мероморфные функции удовлетворяющие условию периодичности $f(z+\omega) = f(z)$ для всех $\omega \in \Lambda$. Пока что мы не знаем, есть ли такая функция.

Отметим, что функции с одним полюсом первого порядка нет - если бы такая функция была, то ее степень равнялась бы единице и тор оказался бы диффеоморфен сфере. Мы сейчас построим функцию с одним полюсом второго порядка. Строится она так: надо рассмотреть такой ряд

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \Big(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\Big).$$

Докажем, что этот ряд равномерно сходится на любом компакте, не содержащем полюсов. В самом деле

$$\Big|\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\Big| = \frac{|z(2-\frac{z}{\omega})|}{|\omega|^3|1-\frac{z}{\omega}|^2}.$$

Следовательно, с точностью до "первых членов" ряд (при z в заданном компакте, например в фиксированном круге с центром в нуле и радиусом r) мажорируется рядом $\sum \frac{C}{|\omega|^3}$ для некоторой постоянной C, укажите такую константу явно. Этот ряд сходится - докажите. Итак, мы построили на плоскости функцию $\wp$, называющуюся функцией Вейерштрасса (конечно, она зависит от решетки Λ). Что мы о ней знаем: что в маленькой окрестности точки $\omega \in \Lambda$ она есть $\frac{1}{(z-\omega)^2}$ с точностью до голоморфной. Докажите, что функция Вейерштрасса четна $\wp(-z) = \wp(z)$.

Докажем, что $\wp$ двояко-периодична. Делается это так. Как мы уже знаем, ряд можно почленно дифференцировать и получившийся ряд сойдется к производной суммы исходного ряда. Поэтому производная

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

и, очевидно (в отличие от $\wp$), двояко-периодична. Рассмотрим функцию $\wp(z+\alpha) - \wp(z)$. Производная этой функции всюду вне полюсов, где она не определена, равна нулю. Следовательно (почему?), сама функция равна константе. Посмотрим на значение этой функции в точке $-\frac{\alpha}{2}$ – это значение равно $\wp(\frac{\alpha}{2}) - \wp(-\frac{\alpha}{2})$. Следовательно, это значение равно нулю и α является периодом. Точно также β является периодом и потому наша функция $\wp$ двояко-периодична.

Такая функция (на торе с одним полюсом второго порядка в нуле и нулевым вычетом), с точностью до умножения на число и прибавления константы, одна, потому что если вычесть подходящую пропорциональную $\wp$ функцию, то останется голоморфная функция которая обязательно постоянна по принципу макисмума. Отметим, что вычет обязательно нулевой, так как иначе после вычета отмасштабированной функции (и может быть сдвинутой) Вейерштрасса осталась б функция, осуществляющая биголоморфное отображение на сферу.

11.3. Ряды Лорана для функции Вейерштрасса и ее производной. У нас есть две рациональные функции $\wp$ и $\wp'$ на торе (есть и другие – $\wp''$, например, но эти первые встреченные нами). Сейчас мы поймем как они алгебраически связаны. Для этого мы, как и выше, возьмем рациональную функцию, и вычтем из нее другие функции так чтобы уничтожить все полюса, в итоге (на компактном многообразии) останется константа.

Чтобы реализовать этот план изучим, как функция Вейерштрасса и ее производная разлагается в ряд Лорана в нуле. Имеем:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + ..,$$

поскольку $\wp$ четная, коэффициенты при членах нечетной степени равны нулю. Коэффициенты при четных членах (нам понадобятся первые три, один из которых – самый первый – мы знаем) ищутся так – дифференцируем почленно ряд и смотрим значение в нуле (поделив на нужный факториал). Отсюда (проверьте)

$$a_2 = 3 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^4}, \quad a_4 = 3 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^6}.$$

Пользуясь разложением для $\wp$, выпишем разложение для $(\wp')^2$:

$$(\wp')^2(z) = \frac{4}{z^6} - \frac{8a_2}{z^2} - 16a_4 + ..,$$

и будем убивать в нем полюс в нуле. Для этого сначала отнимем произведение 4 и $\wp^3$, останется

$$(\wp')^2(z) - 4\wp^3(z) = \frac{20a_2}{z^2} - 28a_4 + ...$$

(кстати, чудесным образом пропал член четвертого порядка – попробуйте найти геометрическое объяснение этому). Следовательно, у двоякопериодической функции

$$(\wp')^2 - 4\wp^3 - 20a_2\wp + 28a_4$$

нет полюса в нуле и следовательно его нет и в других точках решетки. В остальных точках функция $(\wp')^2 - 4\wp^3 - 20a_2\wp + 28a_4$ априори голоморфна и ее значение в нуле равно нулю, следовательно и она сама тождественно равна нулю. Значит, образ тора $\mathbb{C}/\Lambda$ при отображении $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z)) = (x, y)$ лежит на кривой, заданной в $\mathbb{C}^2$ уравнением

$$y^2 = 4x^3 + 20a_2x - 28a_4.$$

Покажем, что каждая точка (x, y) этой кривой лежит в образе отображения $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$. Действительно, степень функции $\wp : \mathbb{C}/\Lambda \to S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ равна двум. У каждой точки есть два (с учетом кратностей) прообраза, поскольку у бесконечности есть ровно один двукратный прообраз – ноль (у функции $\wp$ ровно один с точностью до периодов двукратный полюс в нуле). Рассмотрим решение z уравнения $\wp(z) = x$. Вспомним, что функция Вейерштрасса четная – следовательно, $-z$ тоже решение этого уравнения. Если (x, y) лежит на кривой

$$y^2 = 4x^3 + 20a_2x - 28a_4$$

то y есть одно из двух противоположных чисел $\wp'(z)$ и $\wp'(-z)$. Чуть более тонкое рассуждение (попробуйте найти его) докажет, что каждая точка кривой есть образ ровно одной точки при отображении $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z))$. Кроме того, производная этой параметризации всюду ненулевая.

Закончим несколькими замечаниями общего характера. Очень важны голоморфные формы (то есть в локальной комплексной координате, имеющие вид $h(z)dz$), которые образуют комплексное векторное пространство. Оказывается, на компактных без края одномерных комплексных многообразиях рода g это пространство g-мерно, изоморфно $\mathbb{C}^g$. Это важная теорема, которую мы не будем доказывать. На сфере Римана голоморфных форм, кроме нулевой, нет (докажите), а на торе $\mathbb{C}/\Lambda$ такая форма одна – dz – с точностью до умножения на константу (докажите).

Пусть есть голоморфное непостоянное отображение $f\colon M_1 \to M_2$ одного замкнутого связного комплексного многообразия в другое. Определим след $\mathrm{Tr}(\omega)$ голоморфной формы ω при этом отображении следующим образом. Рассмотрим регулярное значение отображения f, критических значений конечное число (докажите). У любой достаточно малой связной окрестности U этого значения есть ровно k непересекающихся связных открытых подмножеств $U_1, .., U_k$ в M_1 (k – степень отображения f) таких что $f|_{U_i}$ есть биголоморфное отображение U_i на U. На каждой окрестности U_i есть голоморфная форма $\omega|_{U_i}$. Перенесем ее на U при помощи $((f|_{U_i})^{-1})^*$ и получим на U k штук форм $((f|_{U_i})^{-1})^*\omega$. Если сложить все эти формы, то получится форма, которую и называют следом $\mathrm{Tr}(\omega)$ формы ω (на U). Ясно, что результат $\mathrm{Tr}(\omega)(x)$ в самом регулярном значении x (с которого мы начали рассказ) не зависит от выбираемой достаточно малой окрестности U. Таким образом, на множестве регулярных значений $M_2 \setminus \{x_1, .., x_n\}$ возникает голоморфная форма $\mathrm{Tr}(\omega)$. Удивительный на первый взгляд результат состоит в том (теорема Абеля), что эта форма голоморфно продолжается в точки $x_1, .., x_n$. Если критическая точка лежала на границе окрестности U, то форма $((f|_{U_i})^{-1})^*\omega$ не ограничена (попробуйте придать этому высказыванию точный смысл), но когда мы эти формы сложим, то "бесконечности сократятся". Докажите эту теорему.

В заключение расскажу еще, как считать род общей кривой степени n в $\mathbb{C}P^2$ не особенно заботясь о строгости. Рассмотрим общий однородный многочлен f степени n от трех переменных с комплексными коэффициентами (мы не вдаваемся в подробности, объясняя что значит общий, синоним – случайный). Этот многочлен задает коническое множество решений $f(x, y, z) = 0$, которое естественно проецируется в комплекную проективную плоскость $\mathbb{C}P^2$. Множество $f(x, y, z) = 0$ комплексно двумерное, его проекция в $\mathbb{C}P^2$ одномерна,обозначим ее L_0. Для общего многочлена это множество есть гладкое многообразие, которое называется кривой (вещественно оно двумерно). Если многочлен был первой степени $ax + by + cz$ и ненулевой, то получится кривая диффеоморфная двумерной сфере – одномерному комплексному проективному пространству – это легко усмотреть непосредственно. Если второй степени, то общая кривая тоже сфера (мы это не доказываем, но скоро проясним), а необщая бывает две пересекающихся прямых (пример многочлена – xy) или одна прямая (на самом деле она кратная, пример многочлена – x^2). Вообще говоря (и это на самом деле проявление нескольких важных теорем), род общей кривой степени n зависит только от n, все такие кривые диффеоморфны (именно вещественно диффеоморфны, как комплексные многообразия они скорее всего разные). При исключительных значениях коэффициентов, имеющих вещественную коразмерность два в пространстве многочленов, наша кривая становится не диффеоморфной общей кривой. Чтобы понять как топологически устроена общая кривая надо ее рассмотреть там (то есть при таких значениях коэффициентов многочлена), где ее "удобно рассмотреть". Оказывается, это хорошо делать "рядом" с многочленом, который есть произведение n общих многочленов первого порядка, $f = l_1 l_2 .. l_n$. Этот многочлен не общий, кривая $f = 0$ особая, но очень легко описываемая – это объединение n (комплексных проективных) прямых. Мы считаем, что эти прямые находятся в общем положении, то есть никакие две не совпадают и никакая прямая не проходит через точку пересечения других двух. Это множество является гладким многообразием всюду вне точек пересечения этих прямых, этих точек $1 + 2 + .. + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}$, в каждой из них пересекаются две комплексные прямые. Пошевелим теперь чуть-чуть эту кривую так чтоб она стала неособой – вместо $f = 0$ превратим ее в $f_\varepsilon = 0$, которую мы обозначим L_ε. При этом каждая особая точка разрушится так как разрушается кривая $xy = 0$ на комплексной плоскости с координатами (x, y), превращаясь в $xy = \varepsilon$ (я опять не пытаюсь сказать более точно). Рассмотрим шары (четырехмерные) U_k вокруг каждой точки. Эйлерова характеристика дополнения $L \setminus \cup U_k$ равна $n(3 - n)$ – как у n

копий двумерной сферы с $n-1$ дыркой ($n \geqslant 2$). С другой стороны она равна эйлеровой характеристике $L_\varepsilon \setminus \cup U_k$ (особые точки у L находятся как раз в этих шарах U_k), а в каждом шаре нужно заклеить две окружности цилиндром (подумайте почему, это очень важный момент доказательства), операция добавления цилиндра (эйлерова характеристика которого равна нулю) не меняет эйлеровой характеристики. Получаем

$$n(3-n) = 2 - 2g.$$

Следовательно, род g дается формулой

$$g = \frac{n^2 - 3n + 2}{2}.$$

Мы подошли к порогу комплексного мира, за которым масса интересных сюжетов и теорем. Надеюсь, вы перешагнете этот порог и много интересного еще (и скоро) узнаете. Я бы на вашем месте прочел бы книгу Дональдсона 'Riemann Surfaces', дальше (или параллельно) читал бы Гриффитса и Харриса "Принципы алгебраической геометрии". Этот совет совсем не претендует на уникальность, есть еще много способов войти в мир комплексных многообразий итп - вот сразу хочется посоветовать книжку Милнора "Особые точки комплексных гиперповерхностей" и всякие другие. Кроме этого очень полезно слушать какой-нибудь курс, который вы наверняка найдете.