# Задание #2

16 февраля

Пусть $\mathbf{k}$ — поле характеристики не равной 2. Пусть $a, b \in \mathbf{k}^\times$. Обозначим за $\mathbf{H}_{a,b}$ векторное пространство над $\mathbf{k}$ размерности 4 с базисом $1, i, j, ij$. На $\mathbf{H}_{a,b}$ задана инволюция

$$q = x + yi + zj + wij \quad \mapsto \quad \bar{q} = x - yi - zj - wij.$$

Кольцо $A$ вместе с гомоморфизмом колец $\mathbf{k} \to A$ называется *алгеброй* над $\mathbf{k}$. Алгебра $A$ называется алгеброй с делением, если у любого ненулевого элмента из $A$ имеются левый и правый обратные (в таком случае они совпадают). Если $E/F$ — расширение Галуа с группой $G$, то *нормой* элемента $x \in E$ называется $N_{E/F}(x) = \prod_{\sigma \in G} \sigma x$. Заметим, что норма — мультипликативное отображение из $E$ в $F$ (почему?).

### Задача 1

Докажите, что соотношения

$$i^2 = a, \quad j^2 = b, \quad ij = -ji$$

задают на $\mathbf{H}_{a,b}$ структуру $\mathbf{k}$-алгебры.

### Задача 2

Докажите, что для любых $a, b, c \in \mathbf{k}^\times$ имеются изоморфизмы $\mathbf{k}$-алгебр $\mathbf{H}_{a,b} \simeq \mathbf{H}_{b,a}$ и $\mathbf{H}_{a,b} \simeq \mathbf{H}_{ac^2,b}$.

### Задача 3

Определим норму элемента $q \in \mathbf{H}_{a,b}$ как $N(q) = q\bar{q}$. Найдите явную формулу для нормы, докажите, что она мультипликативна, а также что элемент $q$ обратим тогда и только тогда, когда его норма не равна нулю.

### Задача 4

Докажите, что алгебра $\mathbf{H}_{1,b}$ изоморфна алгебре матриц $\mathrm{Mat}_2(\mathbf{k})$ размера $2 \times 2$.

### Задача 5

Докажите, что следующие условия эквивалентны.

(i) $\mathbf{H}_{a,b}$ изоморфна $\mathrm{Mat}_2(\mathbf{k})$.

(ii) $\mathbf{H}_{a,b}$ не является алгеброй с делением.

(iii) $b$ является нормой некоторого элемента расширения $\mathbf{k}[\sqrt{a}]/\mathbf{k}$.