НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия.
Повторный экзамен. 24.10.2022.

Экзамен будет домашним. Решения (не забудьте написать свою фамилию!) надо прислать лектору по электронной почте не позднее вечера вторника 1 ноября. Большая просьба по возможности для перевода рукописных работ в файл использовать сканер, а не фотографировать на телефон, присылать один файл в формате pdf, а не кучу файлов в формате jpg, и писать ручкой, а не карандашом.

Пересчет баллов в оценки НМУ следующий: 50 баллов достаточно для «отлично», 40 для «хорошо», 30 для «удовлетворительно». Для того, чтобы экзамен был засчитан в НМУ, необходимо получить зачёт. Для получения зачёта надо решить в каждом из листков с задачами не менее трёх задач (включая те листки, которые ещё будут появляться после этого экзамена), но возможны ослабления этого критерия в зависимости от общей ситуации со сдачей задач.

Задача 1. Подмногообразие M риманова многообразия N с индуцированной метрикой называется вполне геодезическим, если все геодезические M являются в то же время и геодезическими N. Доказать, что M вполне геодезическое тогда и только тогда, когда вторая квадратичная форма нулевая. *(5 баллов).*

Задача 2. Пусть $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ такая гладкая функция, что $|\operatorname{grad} f| = 1$ на всём M. Доказать, что интегральные кривые векторного поля $\operatorname{grad} f$ являются геодезическими *(10 баллов).*

Задача 3. Пусть M_1 и M_2 римановы многообразия. На прямом произведении $M = M_1 \times M_2$ естественным образом вводится структура риманова многообразия, так как на касательном расслоении $TM = TM_1 \oplus TM_2$ естественно вводится евклидова метрика. Пусть $p_i : M = M_1 \times M_2 \longrightarrow M_i$, $i = 1, 2$, естественные проекции. Чтобы упростить дальнейшие формулы, введём обозначение $X_i = dp_i(X) \in \Gamma(TM_i)$, где $X \in \Gamma(TM)$ векторное поле на M. Пусть R тензор Римана риманова многообразия M, а R^i тензор Римана римановых многообразий M_i, $i = 1, 2$. Доказать, что $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R^1(X_1,Y_1)Z_1, W_1\rangle + \langle R^2(X_2,Y_2)Z_2, W_2\rangle$. *(5 баллов).*

Задача 4. Пусть в условиях предыдущей задачи $\sigma \subset T_pM$, $p \in M$, такая 2-плоскость, что $\dim dp_i(\sigma) = 1$, $i = 1, 2$, то есть плоскость σ «натянута на вектор, касательный к M_1, и на вектор, касательный к M_2». Доказать, что тогда секционная кривизна K_σ в точке p в направлении σ равна нулю. *(5 баллов).*

Задача 5. Докажите, что на многообразии отрицательной секционной кривизны геодезические не содержат сопряжённых точек *(10 баллов).*

Задача 6. Найдите явно якобиевы поля вдоль геодезических на сфере $\mathbb{S}^2$ в подходящем базисе векторных полей. *(10 баллов).*

Задача 7. Найдите $\operatorname{ch}(\xi_k)$, где ξ_k тривиальное расслоение ранга k *(5 баллов).*

Задача 8. Докажите, что если многообразие M является границей некоторого многообразия W, то все числа Понтрягина M, то есть числа Потрягина касательного расслоения TM, равны нулю. *(10 баллов).*

Задача 9*. Найти число Понтрягина

$$\langle p_1(r\gamma^1_{\mathbb{H}}), [\mathbb{S}^4]\rangle = \oint_{\mathbb{S}^4} p_1(r\gamma^1_{\mathbb{H}}),$$

где $\gamma^1_{\mathbb{H}} = (E \longrightarrow \mathbb{H}P^1 \simeq S^4)$ — универсальное расслоение над кватернионной проективной прямой, а r операция овеществления (не забывайте о некоммутативности кватернионов!) *(25 баллов).*