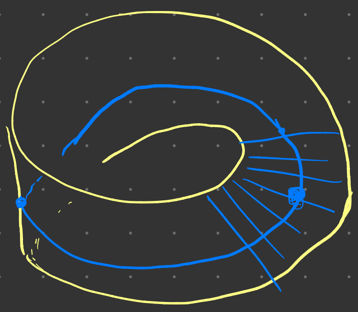
Характеристические Классы.

Лекция 1

Локально тривиальные расслоения

-  – объединения отрезков I_x параметризованых точками $x \in S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

-  – объединения отрезков I_x параметризованых точками $x \in S^1$

-  – объединение окружностей S^1_x (меридианов) параметризованных точками $x \in S^1$.

- M – многообразие.
  TM – множество всевозможных касательных векторов к M.
  $TM = \bigsqcup T_x M \qquad T_x M = \mathbb{R}^{\dim M}$

Q: Что общего?

A: 1) топ. гомеоморфия.

2) локально объединение гомеоморфно произв.

Опр. Локально тривиальное расслоение – четвёрка $(F \to E \xrightarrow{p} B)$: $\forall x \in B \ \exists U_x \subseteq B$ открытая окр-ть x

топ. пр-ва

$$p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times F, \quad p^{-1}(U) \xrightarrow{p} U, \quad U \xleftarrow{pr_1} U \times F$$

F – слой, E – тотальное пр-во, B – база, p – непр. отобр.

pr_1 ← проекция на первый сомн.

$$\begin{array}{ccc} E & & E' \\ & {\searrow}^{p} \quad {\swarrow}^{p'} & \\ & B & \end{array}$$

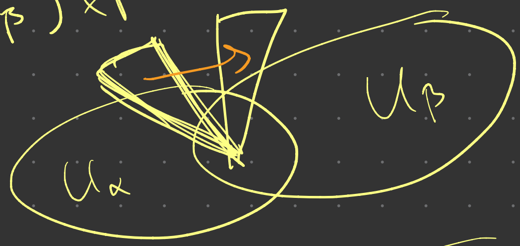
E и E' изоморфны, если существует гомеоморфизм $\varphi: E \overset{\cong}{\to} E'$: $\underline{p} = \underline{p' \circ \varphi}$

$$\begin{array}{ccc} E & \overset{\varphi}{\to} & E' \\ & {\searrow}^{p} \quad {\swarrow}^{p'} & \\ & B & \end{array}$$

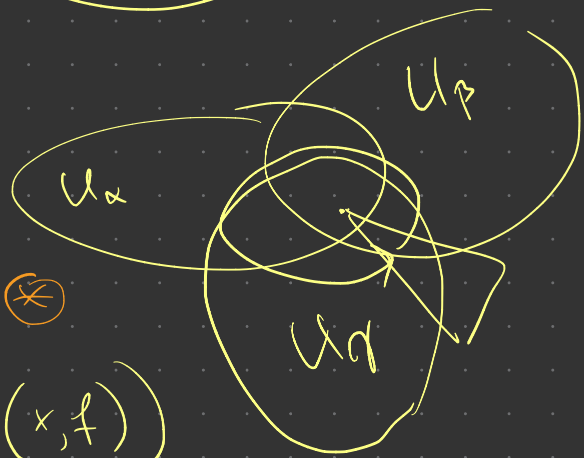
$F \to E \xrightarrow{p} B$ — лок. трив. расслоение.

$B = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ — такое покрытие, что $p^{-1}(U_\alpha) \overset{\varphi_\alpha}{\cong} U_\alpha \times F$

$$\varphi_{\alpha\beta}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \xrightarrow[\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}|_{(U_\alpha \cap U_\beta)\times F}]{\cong} (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$$



- $\varphi_{\alpha\alpha} = 1_{U_\alpha \times F}$
- $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\beta\alpha}^{-1}$ $\quad$ (*)
- $\varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta\gamma} \circ \varphi_{\gamma\alpha} = 1_{(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma) \times F}$



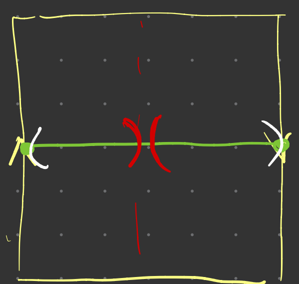
Обратный ход: <u>Дана $\varphi_{\alpha\beta}$</u> удовл. (*)

$$E' = \bigsqcup U_\alpha \times F / ((x,f) \sim \varphi_{\beta\alpha}(x,f))$$
$$\downarrow p'$$
$$B$$

<u>Задача 1.1</u> $F \to E' \xrightarrow{p'} B$ — лок. трив. расслоение <u>изоморфное E.</u>

<u>Примеры</u>. • $B \times F \xrightarrow{pr_1} B$ — тривиальное расслоение.

- E = лист Мёбиуса



$$I^2 / ((0,y) \sim (1, 1-y)) \longrightarrow S^1 = [0,1]/\{0\}\sim\{1\}$$
$$[x,y] \longmapsto [x]$$

$U_0 = \{x \mid 0 < x < 1\}$ $\quad$ $U_{\frac{1}{2}} = \{x \mid x \neq \frac{1}{2}\}$

$$p^{-1}(U_0) \longrightarrow U_0 \times I$$
$$(x,y) \longmapsto (x,y)$$
$$p^{-1}(U_{\frac12}) \longrightarrow U_{\frac12} \times I$$
$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} (x,y) & \frac12 < x \le 1; \\ (x,1-y) & 0 \le x < \frac12 \end{cases}$$

Задача 1.? $E \to S^1$ – не тривиальное расслоение.

- "Расслоение Хопфа".

$$p: S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n \longleftarrow S^n/(\{x\} \sim \{-x\})$$

$\mathbb{R}P^n \longleftarrow$ множество прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через $\{0\}$.

$$(x_0, \dots, x_n) \longmapsto [x_0 : \dots : x_n]$$

$$F = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{1, -1\}$$

$$U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{R}P^n \mid x_i \neq 0\}$$

$$p^{-1}(U_i) = \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_i \neq 0\} \longrightarrow U_i \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
$$(x_0, \dots, x_n) \longrightarrow ([x_0 : \dots : x_n], \operatorname{sgn}(x_i))$$

Задача 1.?' $\boxed{\varphi_{ij} = ?}$

- Расслоение Хопфа.

$$S^1 \to S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$$

Задача 1.2 Не тривиальное локально тривиальное расслоение.

- $V_{m,n} = \{\text{ортонормальные } m\text{-реперы в } \mathbb{R}^n\} \longrightarrow S^{n-1}$ ← многообразие Штифеля.

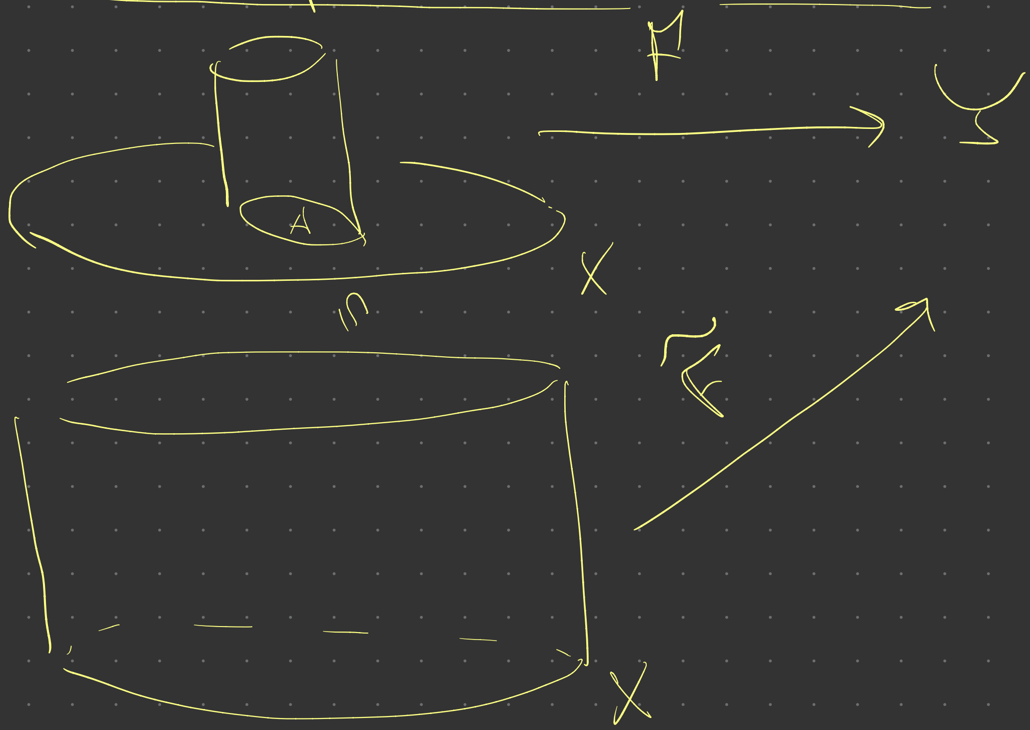
$$\{e_1 \dots e_m\} \longmapsto e_1$$

$V_{m,n}$ – гладкое многообразие

$$SO(n)/SO(n-m)$$
$$SO(n) \supseteq SO(n-1)$$

$F = V_{m-1,n-1}$.

Rk Свойство продолжения гомотопии.



(X,A) - пара Борсука

$$\ldots \to \tilde H_n(A) \to \tilde H_n(X) \to \tilde H_n(X/A) \xrightarrow{\delta} \tilde H_{n-1}(A) \to \ldots$$

$$\tilde H_n(S^1) \to \tilde H_n(S^{2n+1}) \to \tilde H_n(\mathbb{C}P^n)$$

Не точна!

Теорема (свойство поднятия гомотопии)

$F \to E \xrightarrow{p} B$ - лок. трив. расслоение, Z - клеточное пространство.

Дана диаграмма

$$\begin{tikzcd} Z\times\{0\} \arrow[r, "h_0"] \arrow[d, "i", hook] & E \arrow[d, "p"] \\ Z\times I \arrow[r, "H"] & B \end{tikzcd}$$

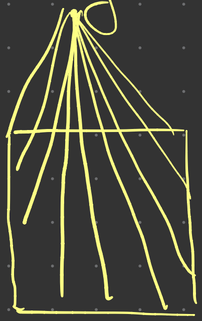
Тогда $\exists\, \tilde H : Z\times I \to E$:

$p\circ \tilde H = H$

$\tilde H \circ i = h_0$

Rk $\tilde H$ не единственно

План доказательства: 1) Свести утв. к случаю продолжения на клетку.



2) Доказать для клетки.

Гомотопические группы

Опр (X,A,x_0) – топ. пара с отм. точкой
$x_0\in A\subseteq X$

n-я относительная гомотопическая группа

$$\pi_n(X,A,x_0)=\{(D^n,S^{n-1},s_0)\to(X,A,x_0)\}/\sim$$

$$(D^n,S^{n-1},s_0)\xrightarrow{f_0}(X,A,x_0)\qquad \exists F:(D^n\times I,\ S^{n-1}\times I,\ s_0\times I)\to(X,A,x_0)$$

$$(D^n,S^{n-1},s_0)\xrightarrow{f_1}(X,A,x_0)$$

$$F|_{D^n\times\{0\}}=f_0\ ;\ F|_{D^n\times\{1\}}=f_1.$$

$n\geq 2$ $(n\geq 1$ и $A=x_0)$ $\Rightarrow$ это группа

$n\geq 3$ $(n\geq 2$ и $A=x_0)$ $\Rightarrow$ абелева группа.

Rk Если $A=x_0$ $\pi_1(X,x_0)$ – фундаментальная группа.

$$(I^n,\partial I^n,\{0\})\overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}}(X,A,x_0)$$


$$\xrightarrow{f+g}(X,A,x_0)$$

Существует точная посл-ть.

$$\dots\to\pi_n(A,x_0)\xrightarrow{i_*}\pi_n(X,x_0)\xrightarrow{q}\pi_n(X,A,x_0)\xrightarrow{\delta}\pi_{n-1}(A,x_0)\to$$

$$\pi_n(X,x_0)=\pi_n(X,x_0,x_0)\qquad (D^n,S^{n-1},x_0)\xrightarrow{f}(X,A,x_0)$$

$$\delta[f]=[f|_{S^{n-1}}:S^{n-1}\to A]$$

Пусть $F\to E\xrightarrow{p}B$ – лок. трив. расслоение

$$\pi_n(E,F,e_0)\xrightarrow{p_*}\pi_n(B,b_0)$$

Утв p_* - изоморфизм.

$$\ldots \to \pi_n(F, e_0) \to \pi_n(E, e_0) \to \pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, e_0) \to \ldots$$

точная пос-ть.

▷ Мономорфность p_*:

$$\begin{tikzcd} D^n \times \{0\} \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & E \arrow[d] \\ D^n \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

т.к. $H(D^n \times \{1\}) = b_0$

$\Downarrow$

$\tilde{H}(D^n \times \{1\}) \subseteq F$

$\Downarrow$

$[f_0] = 0$ □

Пример: $\pi_k(S^n) = 0$, $k < n$

т.о клеточной аппроксимации

$f: X \to Y$ отображение клеточных пр-в

Thm f гомотопно клеточному отображению

$g: X \to Y$

$g(X^{(n)}) \subseteq Y^{(n)}$.

Если f клеточно на подкомплексе $A \subseteq X$, то $\exists$ гомотопия постоянную на A.

Пример $\pi_k(V_{m,n}) = 0$ при $k < n-m$.

$$V_{m-1,n-1} \to V_{m,n} \to S^{n-1}$$

При $k < n-2$. ⊛

$$\ldots \to \underset{=0}{\pi_k(V_{m-1,n-1})} \to \pi_k(V_{m,n}) \to \underset{=0}{\pi_k(S^{n-1})} \to \pi_{k-1}(V_{m-1,n-1}) \to \ldots$$

$\pi_k(V_{m,n}) \cong \pi_k(V_{m-1,n-1}) \cong \ldots \cong \pi_k(V_{1,n-m+1}) = \pi_k(S^{n-m})$

$k < n-m$

Если $m \geq 2$, то работает предположение (*)

Если $m = 1$, то $V_{1,n} = S^{n-1}$, и $\pi_k(S^{n-1}) = 0$ по доказанному.

Ортонормальный m-репер в $\mathbb{R}^n$ $\qquad V_{m,n}$

$\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ $\qquad \downarrow i$

Ортонормальный m-репер в $\mathbb{R}^{n+1}$ $\qquad V_{m,n+1}$

Опр $V_m = \bigcup\limits_{n \geq m} V_{m,n} = \bigsqcup\limits_{n \geq m} V_{m,n} / (x \sim i(x))$

Утв $\pi_k(V_m) = 0$.

$\triangleright$ $S^k \subseteq \mathbb{R}^{k+1}$ – замкнутое ограниченное подмножество

$\Downarrow$

S^k – компактно.

$\Rightarrow f: S^k \longrightarrow V_m \qquad \exists n: f(S^k) \subseteq V_{m,n} \subseteq V_{m,N}$

$N = \max\{k+m+1, n\}$

$f: S^k \longrightarrow V_{m,N}$ – гомотопно постоянному.

$\Rightarrow [f] \in \pi_k(V_m) = 0.$ $\qquad \square$

Утв V_m – клеточное пространство.

Теорема (Уайтхед) $f: X \to Y$ — гомотопическая экв-ть (связных) <u>клеточных</u> пр-в $\Leftrightarrow f_*: \pi_*(X) \xrightarrow{\simeq} \pi_*(Y)$

Следствие
Если X — клеточное пространство и $\pi_*(X) = 0$, то $X \simeq pt$.

В частности V_m — стягиваемо.

Пример: $S^2 \not\simeq S^3 \times \mathbb{C}P^\infty$, но $\pi_n(S^2) \simeq \pi_n(S^3 \times \mathbb{C}P^\infty)$

$$\mathbb{C}P^\infty := \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{C}P^n$$

Утв $H_3(S^3 \times \mathbb{C}P^\infty) \neq 0$. $\quad H_3(S^3 \times \mathbb{C}P^\infty) \supseteq \mathbb{Z}$.

$\triangleright$
$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\mathbb{1}_{S^3}"] & S^3 \times \mathbb{C}P^\infty \arrow[r] & S^3 \end{tikzcd}$$
$$x \longrightarrow (x, [1:0\ldots])$$

$$\begin{tikzcd} H_3(S^3) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\mathbb{1}_{\mathbb{Z}}"'] & H_3(S^3 \times \mathbb{C}P^\infty) \arrow[r] & H_3(S^3) \end{tikzcd}$$
$H_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$, $\quad H_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$

$\square$

$$\underset{\overset{\parallel}{0}}{H_3(S^2)} \not\simeq H_3(S^3 \times \mathbb{C}P^\infty).$$

Rk $\Omega S^2 \simeq \Omega S^3 \times \Omega \mathbb{C}P^\infty \simeq S^1 \times \Omega S^3$