

ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 8: ОРИЕНТИРУЕМЫЕ РАССЛОЕНИЯ, КЛАСС ТОМА
И КЛАСС ЭЙЛЕРА

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Докажите, что для пространства Тома $Th\xi = D\xi/S\xi$ вещественного векторного расслоения ξ имеем $Th(\xi \oplus \mathbb{R}^k) \cong \Sigma^k Th\xi$, где \mathbb{R}^k — тривиальное расслоение над той же базой, а Σ^k — k -кратная надстройка.
2. Докажите, что пространство Тома $Th\xi$ вещественного (комплексного) векторного расслоения ξ над клеточным пространством гомеоморфно $\mathbb{R}P(\xi \oplus \mathbb{R})/\mathbb{R}P(\xi)$ (соответственно, $\mathbb{C}P(\xi \oplus \mathbb{C})/\mathbb{C}P(\xi)$).
3. Докажите, что пространство Тома тавтологического расслоения над $\mathbb{R}P^n$ (соответственно, над $\mathbb{C}P^n$) гомеоморфно $\mathbb{R}P^{n+1}$ (соответственно, $\mathbb{C}P^{n+1}$).
4. Докажите, что вещественное векторное расслоение ξ ориентируемо тогда и только тогда, когда $w_1(\xi) = 0$.
5. Докажите, что при гомоморфизме $H^n(B; \mathbb{Z}) \rightarrow H^n(B; \mathbb{Z}_2)$ класс Эйлера $e(\xi)$ ориентированного расслоения ξ переходит в класс Штифеля–Уитни $w_n(\xi)$.
6. Пусть η^n — тавтологическое расслоение над $BO(n) = G_n(\mathbb{R}^\infty)$. Докажите, что расслоение $\eta^n \oplus \eta^n$ ориентируемо и $e(\eta^n \oplus \eta^n) \neq 0$.
7. Пусть ξ — комплексное n -мерное векторное расслоение и $\xi_{\mathbb{R}}$ — его овеществление. Докажите, что $e(\xi_{\mathbb{R}}) = c_n(\xi)$. *Указание:* это соотношение достаточно проверить для тавтологического расслоения над $BU(n)$.