ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 12: УМНОЖЕНИЕ В СПЕКТРАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ РАССЛОЕНИЯ

ЛЕКТОР: Т. Е. ПАНОВ

1. Выведите из спектральной последовательности гомологическую *точную последовательность Вана* для расслоения $p\colon E \to S^n$ с базой S^n:

$$\ldots \longrightarrow H_m(F) \longrightarrow H_m(E) \longrightarrow H_{m-n}(F) \longrightarrow H_{m-1}(F) \longrightarrow \ldots$$

2. Выведите из спектральной последовательности гомологическую и когомологическую *точную последовательность Гизина* для расслоения $p\colon E \to B$ со слоем S^n:

$$\ldots \longrightarrow H_{m-n}(B) \longrightarrow H_m(E) \longrightarrow H_m(B) \longrightarrow H_{m-n-1}(B) \longrightarrow \ldots$$
$$\ldots \longrightarrow H^{m-n-1}(B) \longrightarrow H^m(B) \longrightarrow H^m(E) \longrightarrow H^{m-n}(B) \longrightarrow \ldots$$

3. Рассмотрим многообразие $H_k = \mathbb{C}P(\underline{\mathbb{C}} \oplus \eta^{\otimes k})$, где $\underline{\mathbb{C}}$ обозначает тривиальное, а η — тавтологическое комплексное одномерное расслоение над $\mathbb{C}P^1$.

а) Вычислите кольцо целочисленных когомологий $H^*(H_k)$ и убедитесь, что кольца, соответствующие чётным и нечётным k, неизоморфны.

б) Докажите, что H_k диффеоморфно $S^2 \times S^2$ при чётном k и $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P}^2$ (связная сумма $\mathbb{C}P^2$ и $\mathbb{C}P^2$ с обращённой ориентацией) при нечётном k.

4. Используя спектальную последовательность универсального расслоения $E \to BU(n)$ со слоем $U(n)$ и вычисление кольца $H^*(U(n))$, докажите изоморфизм

$$H^*(BU(n)) \cong \mathbb{Z}[c_1, c_2, \ldots, c_n], \quad \deg c_i = 2i.$$

5. Имеем изоморфизм колец когомологий $H^*(SU(3)) \cong H^*(S^3 \times S^5)$. Верно ли, что $SU(3)$ и $S^3 \times S^5$ гомотопически эквивалентнты?

6. С помощью спектральной последовательности расслоения докажите следующую *теорему Лере–Хирша.* Пусть $p\colon E \to B$ — локально тривиальное расслоение над односвязной базой B со слоем F. Предположим, что для коммутативного кольца коэффициентов R выполены условия:

а) $H^n(F; R)$ — конечно порождённый свободный R-модуль для любого n;

б) существуют классы $v_j \in H^*(E; R)$, для которых ограничения $i^*(v_j)$ образуют R-базис в $H^*(F; R)$ для вложения каждого слоя $i\colon F \to E$.

Тогда $H^*(E; R)$ — свободный $H^*(B; R)$-модуль с базисом $\{v_j\}$.

7. Вычислите кольцо $H^*(\Omega S^n)$ при $n \geqslant 4$.

Date: 16 мая 2019 г.