

Числа Каталана и их обобщения

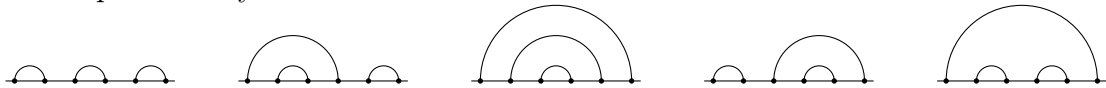
Задача 4.1. а) Количество таблиц $2 \times n$, заполненных числами от 1 до $2n$, так что числа в каждой строке и в каждом столбце возрастают, есть n -е число Каталана.

1 2 3	1 2 4	1 3 4	1 2 5	1 3 5
4 5 6	3 5 6	2 5 6	3 4 6	2 4 6

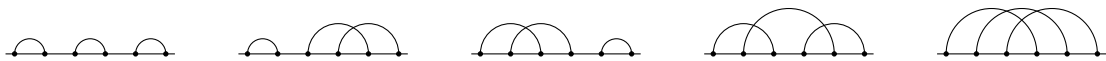
б) Найдите количество таблиц из двух строк, длины m и n ($m \geq n$), заполненных числами от 1 до $m+n$ по тем же правилам.

Задача 4.2. Количество следующих объектов есть n -е число Каталана.

а) Способы соединить $2n$ точек на горизонтальной прямой непересекающимися дугами в верхней полуплоскости.



б) Способы соединить $2n$ точек на горизонтальной прямой дугами в верхней полуплоскости, так что никакая дуга не лежит внутри другой.



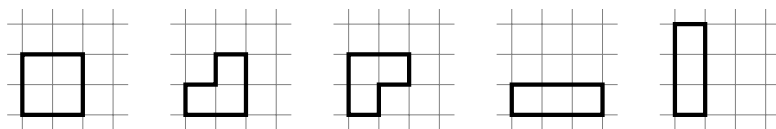
в) Неупорядоченные наборы n целых чисел от 0 до n , сумма которых делится на $n+1$.

0 0 0 0 1 3 0 2 2 1 1 2 2 3 3

г) Последовательности натуральных чисел $1, a_1, \dots, a_n, 1$, в которых каждый a_i больше единицы и является делителем суммы своих соседей.

1 4 3 2 1 1 3 5 2 1 1 3 2 3 1 1 2 5 3 1 1 2 3 4 1

д) *Параллеломино* (пар путей на клетчатой бумаге с началом $(0, 0)$ и концом в одной и той же точке, идущих только вверх и вправо и не имеющих общих точек, кроме начала и конца) периметра $2n + 2$.



Задача 4.3. а) Найдите производящую функцию разбиений $(n+1)$ -угольника на многоугольники непересекающимися диагоналями.

б) Найдите производящую функцию для способов соединить некоторые из n точек на горизонтальной прямой непересекающимися дугами в верхней полуплоскости.

Задача 4.4. Многим известно, что «не существует формулы для решения уравнения $x^k - x + a = 0$ ». Но не будем отчаиваться.

а) Пусть ряд $X = a + X_2 a^2 + X_3 a^3 + \dots$ удовлетворяет уравнению $X^k - X + a = 0$. Как связаны коэффициенты этого ряда с подсчетом разрезов многоугольника диагоналями на $(k+1)$ -угольники?

б*) Найдите явную формулу для этих количеств.

Один из возможных путей начинается с замены $a = X - X^k$ в интеграле $\oint X \frac{da}{a^{n+1}}$.