

Производящие функции и рекурренты

- Задача 1.1.** а) Последовательность T_n задана условиями $T_0 = 1, T_1 = 3, T_2 = 6, T_{n+1} = 3T_n - 3T_{n-1} + T_{n-2}$. Что это за последовательность?
- б) Последовательность C_n задана условиями $C_0 = 1, C_1 = c, C_{n+1} = 2c \cdot C_n - C_{n-1}$. Что это за последовательность? Например, для $c = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.
- в) Последовательность B_n задана условиями $B_0 = 1, B_{n+1} = 2B_n + n$. Найдите ее производящую функцию. Что это за последовательность?

- Задача 1.2.** а) Пусть $a(x)$ – производящая функция последовательности a_k . Какая функция является производящей для последовательности частичных сумм $a_0, a_0 + a_1, \dots, a_0 + \dots + a_k, \dots$?

- б) Докажите при помощи производящих функций тождество для чисел Фибоначчи

$$F_0 + F_1 + \dots + F_k = F_{k+2} - 1.$$

- Задача 1.3.** Производящей функцией какой последовательности является ряд

а) $\frac{1}{(1-ax)^2}$; $\frac{1}{(1-ax)^3}$? б) $\frac{1}{(1-ax)^k}$?

- Задача 1.4.** Найдите производящую функцию последовательности (зависящей от параметра) $B_n(s) = s(s-1)\dots(s-n+1)/n!$ и, заодно, сумму $\sum_{k+l=n} B_k(s)B_l(t)$.

- Задача 1.5.** а) При каких x сходится ряд $\sum_k \binom{2k}{k} x^k$?

- б) Найдите производящую функцию последовательности $\binom{2k}{k}$ и, заодно, сумму $\sum_{k+l=n} \binom{2k}{k} \binom{2l}{l}$.

- Задача 1.6*.** Докажите последнее тождество комбинаторно.