Независимый Московский Университет, Алгебра-2, весна 2019

АЛГЕБРА, ВТОРОЙ СЕМЕСТР

Лекция 2 (21 февраля 2019): Некоторые структурные теоремы

В этой лекции будут расклассифицированы конечнопорождённые модули над полями.

2.0. Разложение модулей в прямые суммы

Фиксируем $R \in\in \mathcal{RING}$.

2.0.0. Подмодули и фактор-модули. Пусть $M \in\in R - \mathcal{MOD}$ и $N \subseteq M$ – *подмодуль*, то есть $N + N \subseteq N$ и $R \cdot N \subseteq N$. Тогда на абелевой фактор-группе $\frac{M}{N}$ очевидным образом вводится структура R-модуля: для $r \in R, m \in M$

$$r \cdot [m]_N := [r \cdot m]_N.$$

Определение очевидно корректно (проверьте!). Абелева группа $\frac{M}{N}$ с этим действием называется *фактор-модулем.*

$$\frac{M}{N} \in\in R - \mathcal{MOD}.$$

2.0.1. Короткие точные последовательности. Пусть в обозначениях предыдущего подраздела $N \subseteq M$ – модуль и подмодуль. Им сопоставляется *короткая точная последовательность*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow \frac{M}{N} \longrightarrow 0,$$

имеющая тот же смысл, что и в осеннем семестре.

2.0.2. Расщепление. Короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} \frac{M}{N} \longrightarrow 0$$

называется *расщепляющейся*, если найдётся *правый обратный* для π, то есть такой морфизм $\sigma : \frac{M}{N} \to M$, что $\pi \circ \sigma = \mathbf{1}_N$.

Не все короткие точные последовательности расщепляемы. Например, последовательность абелевых групп

$$0 \longrightarrow 2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$

нерасщепляема.

2.0.3. Дополняемость. Подмодуль $N_1 \subseteq M$ называется *дополняемым*, если существует такой $N_2 \in\in R - \mathcal{MOD}$, что имеет место изоморфизм

$$M \simeq N_1 \oplus N_2.$$

Предложение. *Подмодуль $N \subseteq M$ дополняем тогда и только тогда, когда последовательность*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} \frac{M}{N} \longrightarrow 0$$

расщепляется.

Доказательство. Если существует расщепление $\sigma : \frac{M}{N} \to M$, то, как легко проверить, морфизм

$$\iota \oplus \sigma : N \oplus \frac{M}{N} \longrightarrow M$$

является изоморфизмом. Обратное утверждение тавтологично. ∎

2.1. Конечномерные векторные пространства

Фиксируем поле $\Bbbk \in\in \mathcal{FLD}$. Категория $\Bbbk$-модулей превращается в категорию $\Bbbk - \mathcal{VECT}$ *векторных пространств над* $\Bbbk$. Теперь, если $V \in\in \Bbbk - \mathcal{VECT}$ и $v \in V$, то v будет называться *вектором.*

Элементы поля $\Bbbk$ будут называться *скалярами.*

2.1.0. Линейная независимость. Вектора $v_1, \ldots, v_n \in V$ называются *линейно независимыми*, если из соотношения

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0_V$$

при $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Bbbk$ следует

$$\lambda_1 = \ldots \lambda_n = 0_{\Bbbk}.$$

Очевидно, один ненулевой вектор $v \in V \setminus \{0\}$ "линейно независим" : из $\lambda v = 0$ при $\lambda \neq 0$ следовало бы $\lambda = 0$, поскольку иначе к вектору $0_V = \lambda v$ можно было бы применить $\frac{1}{\lambda}$.

В модулях над кольцами линейная независимость обычно не рассматривается, поскольку последнее утверждение не выполняется. Например, в конечной абелевой группе A из n элементов выпоняется $n \cdot a$ для любого $a \in A$.

2.1.1. Конечномерность. Пространство называется *конечномерным*, если в нём может найтись лишь конечное множество линейно независимых векторов.

Например, таково пространство $\Bbbk[x]_{\leq n}$; в нём не может найтись $m \leq n+1$ линейно независимых многочленов $f_1, \ldots, f_m$, поскольку, подбирая подходящие $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Bbbk$, можно последовательно понижать степень многочлена $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$.

Наибольшее возможное количество линейно независимых векторов в пространстве называется его *размерностью.*

2.1.2. Базисы. Множество векторов $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ пространства V называется *базисом* этого пространства, если, во-первых, это множество порождает всё пространство, то есть

$$V = \Bbbk v_1 + \cdots + \Bbbk v_n,$$

а, во-вторых, вектора $v_1, \ldots, v_n$ линейно независимы.

Теорема. *Любое множество линейно независимых векторов в конечномерном векторном пространстве можно расширить до базиса этого пространства.*

Доказательство. Пусть вектора $v_1, \ldots, v_n$ линейно независимы.

Если $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$, то доказывать нечего: мы уже построили базис. Если же $\langle v_1, \dots, v_n \rangle \neq V$, то выберем произвольный вектор $v \in V \setminus \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ и присоединим его к $v_1, \dots, v_n$. Получившееся множество линейно независимо: если бы имело место соотношение

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda v = 0,$$

то в нём обязательно выполнялось бы $\lambda \neq 0$, поскольку иначе это было бы соотношение линейной зависимости между остальными векторами. Поделив выписанную линейную зависимость на λ (именно здесь мы пользуемся тем, что $\Bbbk$ – поле! над произвольным кольцом это всё неверно...), мы выразили бы v линейно через остальные вектора, что противоречило бы предположению $v \notin \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

Мы описали процедуру расширения произвольного множества линейно независимых векторов, не являющегося базисом. Поскольку пространство V по предположению конечномерно, это процедура может осуществиться лишь конечное число раз. ■

Следствие. *Любое конечномерное ненулевое векторное пространство обладает базисом.*

Доказательство. Согласно замечанию в конце раздела **2.1.0**, мы можем начать с одного ненулевого вектора, а затем применять теорему, пока не построим базис. ■

2.1.3. Дополняемость. Мы получим результат, коренным образом отличающий векторные пространства от модулей над произвольными кольцами.

Теорема. *Любое подпространство конечномерного векторного пространства дополняемо.*

Доказательство. Пусть $W \subset V$ – пара векторных пространств (из конечномерности большего следует конечномерность меньшего). Выбрав согласно следствию предыдущего подраздела в W базис $\{w_1, \dots, w_n\}$, мы согласно теореме предыдущего подраздела дополним его до базиса $\{w_1, \dots, w_n; v_1, \dots, v_n\}$. Тогда, очевидно,

$$W = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$$

и

$$V = W \oplus \langle v_1, \dots, v_n \rangle. ■$$

2.1.4. Классификация. Сейчас мы убедимся, что конечномерные векторные пространства (опять-таки в разительном отличии от модулей над общими кольцами) обладают единственным инвариантом – размерностью.

Теорема. *Любое векторное пространство размерности $n \in \mathbb{N}$ над $\Bbbk$ изоморфно пространству* $\underbrace{\Bbbk \oplus \cdots \oplus \Bbbk}_{n}$

Доказательство. В n-мерном пространстве V выберем базис $\{v_1, \ldots, v_n\}$; тогда требуемый изоморфизм задаётся формулой

$$\underbrace{\Bbbk \oplus \cdots \oplus \Bbbk}_{n} \xrightarrow{\simeq} V : (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n. \blacksquare$$

2.2. Категория конечномерных векторных пространств

Расклассифицоровав индивидуальные конечномерные векторные пространства, мы обратимся теперь к категории, которую они составляют. Хотя классы изоморфизма объектов категории нумеруются натуральными числами, сама категория обладает весьма богатой структурой.

Мы обозначим её $\Bbbk - \mathcal{VECT}^{\mathrm{fin.dim}}$.

2.2.0. Пространство линейных отображений. Мы будем использовать нестандартное обозначение

$$V \pitchfork W := \mathrm{Mor}_{\Bbbk - \mathcal{VECT}^{\mathrm{fin.dim}}}(V, W).$$

Замечательное свойство рассматриваемой категории:

$$V \pitchfork W \in\in \Bbbk - \mathcal{VECT}^{\mathrm{fin.dim}}.$$

Теорема. $\dim(V \pitchfork W) = \dim(V)\dim(W)$.
Доказательство. См. ниже. $\blacksquare$

2.2.1. Матрица линейного отображения. Будем работать в не вполне стандартных обозначениях:

$$V = \sum_{i=1}^{\dim V} \Bbbk v^i = \{v = \sum_{i=1}^{\dim V} x_i v^i \mid x_1, \ldots, x_{\dim V} \in \Bbbk\},$$

$$W = \sum_{j=1}^{\dim W} \Bbbk w^j = \{w = \sum_{j=1}^{\dim W} y_j w^j \mid y_1, \ldots, y_{\dim W} \in \Bbbk\}.$$

Линейное отображение $A \in V \pitchfork W$ определяется образами базисных векторов:

$$A : V \longrightarrow W : v^i \mapsto \sum_{j=1}^{\dim W} a^i_j w^j.$$

Поскольку скаляры a^i_j произвольны, это доказывает теорему из **2.2.0**.

Что касается произвольного вектора

$$v = \sum_{i=1}^{\dim V} x_i v^i,$$

то

$$A(v) = \sum_{i=1}^{\dim V} x_i \sum_{j=1}^{\dim W} a^i_j w^j.$$

Для произвольного вектора

$$w = \sum_{j=1}^{\dim W} y_j w^j \in W$$

соотношение

$$\boxed{A(v) = w}$$

разложенное по базису $w^1, \ldots, w^{\dim W}$, превращается в систему линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{\dim V} a^i_j x_i = y_j.$$

Таким образом, *разрешимость* этой системы приобрела инвариантный смысл вопроса об образе $A(V)$.

2.2.2. Размерность образа и ранг матрицы. Образ пространства при линейном отображении – разумеется, подпространство.

Его размерность можно вычислить как количество линейно независимых либо столбцов, либо строк. Совпадение будет объяснено ниже.

2.2.3. Кофунктор "сопряжённое пространство" . В нашем изложении это – центральная конструкция теории. Его определение:

$$\Bbbk - \mathcal{VECT}^{\text{fin.dim}} \longrightarrow\!\!\!\longrightarrow \Bbbk - \mathcal{VECT}^{\text{fin.dim}\leftarrow} :: V \mapsto\!\!\!\mapsto V \pitchfork \Bbbk.$$

Для $v \in V, x \in V^*$

$$x(v) =: < x, v > .$$

Для $V, W \in \Bbbk - \mathcal{VECT}^{\mathrm{fin.dim}}$ и $A \in V \pitchfork W$ по определению

$$A^* : W^* \longrightarrow V^* : y \mapsto \big(v \mapsto < y, v > \big).$$

Для базиса $V = \langle v^1, \ldots, v^n \rangle$ в сопряжённом пространстве выбирается *двойственный базис* $V^* =: \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ с соотношениями

$$< x_i, v^j >= \delta_i^j$$

(символ Кронекера). Тогда, если для $A \in V \pitchfork W$

$$A(v^i) = \sum_{j=1}^{\dim W} a_j^i w^j,$$

то при $< y_j, w^i >= \delta_j^i$ двойственное отображение задаётся "транспонированной" матрицей:

$$A^*(y_j) = \sum_{i=1}^{\dim V} a_j^i x_i.$$

Это объясняет совпадение рангов матрицы по строкам и по столбцам.

2.2.4. Второе сопряжённое. Для любого, не обязательно конечномерного, пространства, имеется *каноническое вложение*

$$V \hookrightarrow V^{**} : v \mapsto \big(x \mapsto < x, v > \big).$$

В случае конечномерных пространств из соображений размерности это – изоморфизм, причём *канонический*,

$$V^{**} \cong V$$

Пока это понятие вводится на интуитивном уровне, будучи противопоставлено НЕканоническому

$$V^* \simeq V.$$