ЛЕКЦИЯ 8

Краткое содержание. Классификация проективных квадрик над полем $\mathbb{R}$. Аффинные квадрики.

Теорема 1. *Для любой квадратичной формы Q на вещественном n-мерном пространстве V существуют числа $p, q \geq 0$ такие, что $p + q \leq n$ и форма Q эквивалентна форме $F_{p,q}$ на пространстве $\mathbb{R}^n$, заданной формулой $F_{p,q}(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$. Числа p и q определяются формой Q однозначно; сумма $p + q$ равна рангу Q.*

Иными словами, для любой вещественной квадратичной формы Q существуют числа p и q и базис $e_1', \dots, e_n'$ в пространстве V такой, что $Q(x_1 e_1' + \dots + x_n e_n') = x_1^2 + \dots + x_a^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$. Числа p и q не зависят от выбора базиса.

Доказательство. Согласно теореме 1 лекции 7, форма Q эквивалентна форме $S_{b_1,\dots,b_k}(x_1, \dots, x_n) = b_1 x_1^2 + \dots + b_k x_k^2$ на пространстве $\mathbb{R}^n$. Обозначим $p \stackrel{\text{def}}{=} i_+(Q) \stackrel{\text{def}}{=} \#\{j \mid b_j > 0\}$, $q \stackrel{\text{def}}{=} i_-(Q) \stackrel{\text{def}}{=} \#\{j \mid b_j < 0\}$ (так что $p + q = k$) и $i_0(Q) = n - k$. Пусть $f_1, \dots, f_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$ и $C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейное отображение, для которого $C(f_i) = f_i/\sqrt{b_i}$ при $i = 1, \dots, p$, $C(f_i) = f_i/\sqrt{-b_i}$ при $i = p+1, \dots, p+q$ и $C(f_i) = f_i$ при $p + q + 1 \leq i \leq n$. Тогда $\mu_C(S_{b_1,\dots,b_k}) = F_{p,q}$, так что Q эквивалентна $F_{p,q}$.

Для доказательства второго утверждения назовем квадратичную форму Q на пространстве W положительно определенной, если $Q(v) > 0$ для всякого $v \in W$, $v \neq 0$. Пусть $e_1', \dots, e_n'$ — базис, о котором идет речь во второй формулировке теоремы. Ограничение квадратичной формы на подпространство, порожденное $e_1', \dots, e_p'$, очевидно, положительно определено. Если $W \subset V$ и $\dim W > p$, то W обязательно пересекается по ненулевому вектору v с подпространством коразмерности p, порожденным $e_{p+1}', \dots, e_n'$. Очевидно, $Q(v) \leq 0$, и тем самым ограничение Q на W не является положительно определенным. Следовательно, p — наибольшая размерность подпространства, ограничение Q на которое положительно определено, и тем самым p не зависит от выбора базиса. С другой стороны, $p + q$ равно рангу Q — следовательно, q тоже не зависит от базиса. □

Тройка чисел $(p, q, n - p - q) \stackrel{\text{def}}{=} (i_+(Q), i_-(Q), i_0(Q))$ называется сигнатурой вещественной квадратичной формы Q. Разность $i_+(Q) - i_-(Q)$ называется индексом инерции. Иногда сигнатурой называется пара $(i_+(Q), i_-(Q))$.

Следствие 1. *Если сигнатуры вещественных квадратичных форм Q_1 и Q_2 одинаковы или отличаются перестановкой чисел $i_+(Q)$ и $i_-(Q)$, то вещественные проективные квадрики P_{Q_1} и P_{Q_2} проективно эквивалентны.*

Доказательство. Если сигнатуры совпадают, то следствие немедленно вытекает из теоремы 1. Если сигнатура Q_1 равна (p, q, r), а сигнатура Q_2 есть (q, p, r), то заметим, что уравнения $x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2 = 0$ и $x_1^2 + \dots + x_q^2 - x_{q+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2 = 0$ получаются друг из друга перенумерацией переменных (и сменой знака). □

Замечание. Квадрики с сигнатурами $(n, 0, 0)$ и $(0, n, 0)$ — пустые множества, а остальные квадрики непусты. На самом деле если верно утверждение, обратное к следствию 1: если две вещественные квадрики проективно эквивалентны, то их сигнатуры либо совпадают, либо отличаются обменом местами чисел $i_+(Q)$ и $i_-(Q)$. Мы не будем доказывать это утверждение.

Пример 1. Проективная классификация вещественных коник (т.е. квадрик в $\mathbb{R}P^2$):

1) Сигнатуры $(3, 0, 0)$ и $(0, 3, 0)$ — пустое множество (“мнимый эллипс”), уравнение $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$.
2) Сигнатуры $(2, 1, 0)$ и $(1, 2, 0)$ — невырожденная коника (эллипс/парабола/гипербола), уравнение $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$.
3) Сигнатура $(1, 1, 1)$ — пара различных прямых, уравнение $x_0^2 - x_1^2 = 0$, то есть $x_1 = \pm x_0$.
4) Сигнатуры $(2, 0, 1)$ и $(0, 2, 1)$ — точка (“окружность нулевого радиуса”), уравнение $x_0^2 + x_1^2 = 0$, то есть $x = \{[0 : 0 : 1]\}$;
5) Сигнатуры $(1, 0, 2)$ и $(0, 1, 2)$ — прямая (“пара совпадающих прямых”), уравнение $x_0^2 = 0$, то есть $x_0 = 0$.
6) Сигнатура $(0, 0, 3)$ (нулевая квадратичная форма) — вся проективная плоскость; часто такое не считают коникой.

Пусть L — аффинное пространство размерности n над полем $\mathbb{F}$; представим его в виде $L = \mathbb{P}V \setminus \mathbb{P}W$, где V — векторное пространство размерности $n+1$, а $W \subset V$ — гиперплоскость в нем. Аффинной квадрикой называется пересечение $R_Q = L \cap P_Q$ аффинного пространства с проективной квадрикой $P_Q \subset \mathbb{P}V$. Проектвная квадрика P_Q называется проективным замыканием аффинной квадрики R_Q.

Пример 2. Пусть $L = \mathbb{F}P^n \setminus \mathbb{F}P^{n-1}$, где подпространство $W \subset \mathbb{F}^{n+1} = \{(x_0, \dots, x_n)\}$ задается уравнением $x_0 = 0$. Аффинное пространство L можно отождествить с $\mathbb{F}^n$, введя координаты $y_i = x_i/x_0$, $i = 1, \dots, n$. Квадратичная форма $Q : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ задается формулой $Q(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i,j=0}^n b_{ij} x_i x_j$. Тогда аффинная квадрика задается неоднородным уравнением $R_Q = \{(y_1, \dots, y_n) \mid \sum_{i,j=1}^n b_{ij} y_i y_j + 2 \sum_{i=1}^n b_{0i} y_i + b_{00} = 0\}$ степени не выше 2 (в линейном члене учитывается симметричность матрицы b_{ij}).

Пусть $A : L_1 \to L_2$ — обратимое аффинное отображение между аффинными пространствами (одной и той же размерности). Согласно теореме о структуре аффинной группы, существует и единственно с точностью до пропорциональности линейное отображение $\mathcal{A} : V_1 \to V_2$ такое, что $A = \mathbb{P}\mathcal{A}|_{L_1}$ (здесь считается, что $L_i = \mathbb{P}V_i \setminus \mathbb{P}W_i$, $i = 1, 2$). Тогда $A(R_Q) = R_{\mu_{\mathcal{A}}(Q)}$ и одновременно $\mathbb{P}\mathcal{A}(P_Q) = P_{\mu_{\mathcal{A}}(Q)}$; таким образом аффинная группа действует на множестве аффинных квадрик, причем каждое аффинное отображение продолжается на проективные замыкания. Аффинные квадрики, переводимые друг в друга обратимым аффиинным отображением, называются аффинно эквивалентными; их проективные замыкания проективно эквивалентны.

Для классификации аффинных квадрик нам понадобится следующее уточнение теоремы 1 лекции 7:

Теорема 2. *Пусть V — векторное пространство размерности n над полем $\mathbb{F}$ характеристики, не равной 2, $Q : V \to V$ — квадратичная форма, а $W \subset V$ — векторное подпространство размерности m. Тогда в V существует базис $e_1, \dots, e_n$ такой, что*

1) *$e_1, \dots, e_m$ — базис в W;*
2) *Существуют целые неотрицательные числа k, ℓ, s такие, что $k + s \le m$ и $\ell + s \le n - m$, и числа $b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_\ell \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ такие, что $Q(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = b_1 x_1^2 + \dots + b_k x_k^2 + x_{k+1} x_{m+\ell+1} + \dots + x_{k+s} x_{m+\ell+s} + c_1 x_{m+1}^2 + \dots + c_\ell x_{m+\ell}^2$.*

Числа k, ℓ, s определяются формой Q и не зависят от выбора базиса.

Доказательство. Индукция по $n = \dim V$ и по $m = \dim W$. Если ограничение $Q|_W$ не равно тождественно нулю, то выберем $e_1 \in W$ такой, что $Q(e_1) \stackrel{\text{def}}{=} b_1 \ne 0$. Как и в доказательстве теоремы 1 лекции 7, положим $V' = e_1^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid B(v, e_1) = 0\}$ и $W' \stackrel{\text{def}}{=} e_1^\perp \cap W$, где билинейная форма B — поляризация формы Q; тогда $W' \subset V'$ и $\dim W' < \dim W$, $\dim V' < \dim V$. По предположению индукции, теорема верна для V' и W'; пусть $e_2, \dots, e_n$ — требуемый базис в W'. Тогда $e_1, \dots, e_n$ — базис в V (поскольку из $Q(e_1) = B(e_1, e_1) \ne 0$ вытекает, что $e_1 \notin V'$), а $e_1, \dots, e_m$ — базис в W (по той же причине). С другой стороны, $Q(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = b_1 x_1^2 + Q(x_2 e_2 + \dots + x_n e_n)$; поскольку второе слагаемое имеет описанный в теореме вид, теорема в данном случае доказана.

Пусть теперь $Q|_W \equiv 0$, откуда $B(w_1, w_2) = 0$ при $w_1, w_2 \in W$. Если $W \subset \operatorname{Ker} B$ (т.е. $B(w, v) = 0$ при всех $w \in W$, $v \in V$), то теорема вытекает из теоремы 1 лекции 7; в этом случае $k = 0$ и $s = 0$. В противном случае пусть $e_1 \notin \operatorname{Ker} B \cap W$, то есть существует $f_1 \in V \setminus W$ такой, что $B(e_1, f_1) \ne 0$. Заменой $f_1 \mapsto \alpha f_1$ можно добиться равенства $B(e_1, f_1) = 1$, а заменой $f_1 \mapsto f_1 + \beta e_1$ — равенства $Q(f_1) = B(f_1, f_1) = 0$ (докажите!).

Положим теперь по определению $V' = f_1^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid B(v, f_1) = 0\}$ и $W' \stackrel{\text{def}}{=} (f_1)_W^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in W \mid B(w, f_1) = 0\} \subset W$. Оба подпространства имеют коразмерность 1 в V и W соответственно; при этом $f_1 \in f_1^\perp$, поскольку $Q(f_1) = 0$. Из этого вытекает, что $f_1 \in \operatorname{Ker} B|_{V'}$, но $e_1 \notin W'$. По предположению индукции, в V' имеется базис $e_2, \dots, e_n$, в котором форма имеет указанный вид, а что $e_2, \dots, e_m$ — базис в W'. Тогда $e_1, \dots, e_n$ — базис в V (почему?) такой, что $e_1, \dots, e_m$ — базис в W (почему?); поскольку $f_1 \in \operatorname{Ker} B|_{V'}$, без ограничения общности можно считать, что $f_1 = e_{m+\ell+1}$ для некоторого ℓ. Тогда форма имеет вид $Q(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = x_1 x_{m+\ell+1} + Q(x_2 e_2 + \dots + x_n e_n)$, что завершает доказательство существования базиса.

Имеем $\operatorname{rk}(Q|_W) = k$, $\operatorname{rk}(Q) = k + \ell + 2s$ и $\dim \operatorname{Ker} B|_W - \dim(\operatorname{Ker} B \cap W) = s$, откуда вытекает, что k, ℓ и s определены однозначно. □

Пусть теперь $Q_1, Q_2 : V \to \mathbb{F}$ — квадратичные формы, $W \subset V$ — гиперплоскость, а $R_{Q_1}, R_{Q_2} \subset L = \mathbb{P}V \setminus \mathbb{P}W$ — аффинные квадрики ($P_{Q_1}, P_{Q_2} \subset \mathbb{P}V$ — их проективные замыкания).

Следствие 2. *Пусть $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, а формы Q_1 и Q_2 обладают свойствами $\operatorname{rk}(Q_1) = \operatorname{rk}(Q_2) \stackrel{\text{def}}{=} k$, $\operatorname{rk}(Q_1|_W) = \operatorname{rk}(Q_2|_W) \stackrel{def}{=} k$ и $\dim(\operatorname{Ker} B_1 \cap W) = \dim(\operatorname{Ker} B_2 \cap W)$, где B_1, B_2 — поляризации форм Q_1, Q_2. Тогда квадрики R_{Q_1}, R_{Q_2} аффинно эквивалентны.*

Упражнение 1. Перечислите условия на числа k, ℓ, s, которые гарантируют существование квадрики в следствии 2. При каких k, ℓ, s аффинная квадрика непуста?

Упражнение 2. Сформулируйте и докажите утверждение, аналогичное следствию 2, для случая $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Пример 3. Классификация аффинных коник в $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}P^2 \setminus \mathbb{C}P^1$:

1) $k = \mathrm{rk}(Q|_W) = 2$, $k + \ell + 2s = \mathrm{rk}(Q) = 3$, откуда $\ell = 1$, $s = 0$. Из теоремы 2 и следствия вытекает, что проективная коника задается в однородных координатах $[x_0 : x_1 : x_2]$ уравнением $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$; при этом бесконечно удаленная прямая задается уравнением $x_2 = 0$. В аффинных координатах $y_0 = x_0/x_2$, $y_1 = x_1/x_2$ аффинная коника задается уравнением $y_0^2 + y_1^2 + 1 = 0$ ("комплексный эллипс" или "комплексная гипербола"). Проективная коника пересекает бесконечно удаленную прямую в двух точках $[1 : i : 0]$ и $[1 : -i : 0]$.
2) $k = \mathrm{rk}(Q|_W) = 1$, $k + \ell + 2s = \mathrm{rk}(Q) = 3$, откуда $\ell = 0$, $s = 1$: другое решение $\ell = 2$, $s = 0$, очевидно, невозможно, т.к. должно быть $\ell + s \leq n - m = 1$. Проективная коника в однородных координатах задается уравнением $x_0^2 + x_1x_2 = 0$ и пересекает бесконечно удаленную прямую $x_2 = 0$ в единственной точке $[0 : 1 : 0]$ (касается бесконечно удаленной прямой); аффинная коника в координатах $y_0 = x_0/x_2$, $y_1 = x_1/x_2$ задается уравнением $y_0^2 + y_1 = 0$ ("комплексная парабола").
3) $k = \mathrm{rk}(Q|_W) = 0$, $k+\ell+2s = \mathrm{rk}(Q) = 3$ имеет два решения: $\ell = 1$, $s = 1$ и $\ell = 3$, $s = 0$. Оба невозможны, т.к. нарушают неравенство $\ell + s \leq 1$. Следовательно, коник с такими параметрами не существует.
4) $k = \mathrm{rk}(Q|_W) = 2$, $k + \ell + 2s = \mathrm{rk}(Q) = 2$, откуда $\ell = s = 0$. Проективная коника в однородных координатах задается уравнением $x_0^2 + x_1^2 = 0$ и является объединением двух прямых $x_0 = \pm ix_1$. Эти прямые пересекают бесконечно удаленную прямую $x_2 = 0$ в двух точках, $[1 : i : 0]$ и $[1 : -i : 0]$. Аффинная коника в координатах $y_0 = x_0/x_2$, $y_1 = x_1/x_2$ задается уравнением $y_0^2 + y_1^2 = 0$ и также представлят собой объединение двух прямых, $y_0 = \pm iy_1$, пересекающихся в точке $y_0 = y_1 = 0$.
5) $k = \mathrm{rk}(Q|_W) = 1$, $k + \ell + 2s = \mathrm{rk}(Q) = 2$, откуда $\ell = 1$, $s = 0$. Проективная коника в однородных координатах задается уравнением $x_0^2 + x_2^2 = 0$ и представляет собой объединение двух прямых $x_0 = \pm ix_2$, пересекающихся в точке $[0 : 1 : 0]$, лежащей на бесконечно удаленной прямой $x_2 = 0$. Аффинная коника в координатах $y_0 = x_0/x_2$, $y_1 = x_1/x_2$ задается уравнением $y_0^2 + 1 = 0$ и представляет собой объединение двух параллельных прямых $y_0 = \pm i$.
6) $k = \mathrm{rk}(Q|_W) = 0$, $k + \ell + 2s = \mathrm{rk}(Q) = 2$ имеет два решения: $\ell = 0$, $s = 1$ и $\ell = 2$, $s = 0$. Второе из них нарушает неравенство $\ell + s \leq 1$, так что сооответствующих коник не существует. В первом случае проективная коника задается уравнением $x_0x_2 = 0$ и представляет собой объединение двух прямых, одна из которых — бесконечно удаленная $x_2 = 0$. Аффинная коника в координатах $y_0 = x_0/x_2$, $y_1 = x_1/x_2$ задается уравнением $y_0 = 0$ и представляет собой прямую. Иногда такие случаи не считаются кониками.
7) $k = \mathrm{rk}(Q|_W) = 1$, $k + \ell + 2s = \mathrm{rk}(Q) = 1$, откуда $\ell = s = 0$. Проективная коника в однородных координатах задается уравнением $x_0^2 = 0$ и представляет собой прямую, не совпадающую с бесконечно удаленной. Аффинная коника задается уравнением $y_0^2 = 0$ и также представляет собой прямую ("две совпавшие прямые").
8) $k = \mathrm{rk}(Q|_W) = 0$, $k+\ell+2s = \mathrm{rk}(Q) = 1$, откуда $\ell = 1$, $s = 0$. Проективная коника задается уравнением $x_2^2 = 0$ и представляет собой бесконечно удаленную прямую ("две совпавшие прямые"). Аффинная коника задается уравнением $1 = 0$ и представляет собой пустое множество (все точки проктивного замыкания лежат на бесконечно удаленной прямой).
9) $\mathrm{rk}\, Q = 0$. В этом случае проективная и аффинная коника задаются уравнением $0 = 0$ и совпадают с проективной и аффинной плоскостью соответственно.