

- 1. Пусть $\gamma_1 := \{z: |z - i| = 1\}^+$ и $\gamma_2 := \{z: |z + i| = 1\}^+$ и пусть F_0 — это элемент (f_0, \mathbb{D}) , где $f_0(z) = \ln(z + \sqrt{1 + z^2})$, $f_0(0) = 0$. Найти результат аналитического продолжения элемента F_0 по кривым $3\gamma_1$, $\gamma_1 + \gamma_2$ и $\gamma_2 + \gamma_1$.
- 2. Провести исследование указанных ниже ПАФ (полных аналитических функций) по Вейерштрассу (выбрать начальный элемент; определить, вдоль каких путей он продолжается; определить, сколько элементов имеется с центром в данной точке и как они друг от друга отличаются; найти и описать изолированные особые точки): $\sqrt[3]{1 - z^2}$, $\text{Ln}(1 + z^2)$, $1/\sqrt{1 + \sqrt{z}}$.
3. Описать максимальные области, в которой аналитические функции $\sqrt[m]{(z^2 - 1)(z^2 - 4)}$, при $m = 2, 3, 4$, и $\sqrt[n]{1 - z^n}$ допускают выделение голоморфных ветвей.
4. Описать все особые точки полных аналитических функций, заданных выражениями: $1/(\sqrt{z} - \sqrt[3]{z})$, $\sqrt{(\text{Ln } z)^2 - 1}$, $\text{Arctg}(\sqrt[3]{z})$.
- 5. Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — односвязная область и пусть $f \in \text{Hol}(G)$ и $f \neq 0$. Доказать, что $f = g^2$ для некоторой функции $g \in \text{Hol}(G)$ в том и только том случае, когда все нули функции f в G имеют четный порядок.
6. Доказать, что всякая функция $f \in \text{Hol}(\mathbb{D})$, такая, что $f(z) \neq \pm 2/3\sqrt{3}$ при $z \in \mathbb{D}$, может быть представлена в виде $f = g^3 - g$, где $g \in \text{Hol}(\mathbb{D})$.
7. Проинтегрировав подходящую ветвь функции $(\text{Ln } z)^2/(1 + z + z^2)$ по границе области $\{z: \rho < |z| < R, \arg z \in (0, 2\pi)\}$, вычислить интеграл $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 + x + 1} dx$.
- 8. Пусть $a_1 \neq a_2$ и $b_1 \neq b_2$ лежат в \mathbb{D} . При каких a_1, a_2, b_1 и b_2 области $\mathbb{D} \setminus \{a_1, a_2\}$ и $\mathbb{D} \setminus \{b_1, b_2\}$ конформно эквивалентны?
9. Пусть $\Omega = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$. Доказать, что существует единственная функция $f \in \text{Hol}(\Omega)$ такая, что $f(z)^2 = z^2 - 1$ и $f(0) = 1$. Проверить, что для любого $z \in \Omega$ выполнено $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + z \sin t} = \frac{2\pi}{f(z)}$.
10. Показать, что каждый из ростков $\sum_{n \geq 1} n^s z^n$, при $s = 0, \pm 1, \pm 2$ задает аналитическую функцию на множестве $\mathbb{C}_\infty \setminus E_s$, $\#E_s < \infty$. Для каждого из этих ростков найти наибольшую область указанного вида и число листов полученной аналитической функции над ней.