1. Пусть f_1 — голоморфная ветвь функции $\sqrt[3]{\dfrac{z}{z-1}}$ в области $\mathbb{C}\setminus\big([0,2i]\cup[1,2i]\big)$ такая, что $f_1\big(\frac{1}{2}\big) = e^{i\pi/3}$. Разложить функцию f_1 в ряд Лорана в кольце $\{|z|>2\}$ (с центром $a=0$).

2. Пусть функции $f, g \in Hol(D(a,\varepsilon))$, $\varepsilon > 0$, и пусть точка a является нулем порядка m, $m\in\mathbb{N}$, для функции f и нулем порядка $m+1$ для функции g. Показать, что

$$\operatorname{res}_a \frac{f}{g} = \frac{(m+1)f^{(m)}(a)}{g^{(m+1)}(a)}.$$

Получить аналогичную формулу для $\operatorname{res}_a\big(f/h\big)$, где $h\in Hol(D(a,\varepsilon))$ и h имеет в точке a ноль порядка $m+2$.

3. Пусть $P(z)$ и $Q(z)$ такие многочлены комплексного переменного, что $\deg P < \deg Q$, пусть $R(z) = P(z)/Q(z)$, и пусть $\{z_1,\ldots,z_n\}$ — множество нулей многочлена Q (без учета кратности). Доказать, что справедлива формула $R(z) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{\zeta=z_k} \frac{R(\zeta)}{z-\zeta}$.

•4. Используя теорему Коши о вычетах вычислить: $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{z^2\sin^2\big(1/z\big)}{(z-1)(z-2)}dz$; $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\vartheta}{13+12\sin\vartheta}$.

•5. Используя теорему Коши о вычетах вычислить: v. p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-e^{iax}}{x^2}dx$; $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\ln x\,dx}{(x-1)\sqrt{x}}$. Во всех случаях обосновать существование соответствующих интегралов и пояснить, каким образом применяется теорема Коши о вычетах.

6. а) Пусть $f\in Hol(\mathbb{D})$. Показать, что равенство $\displaystyle\lim_{|z|\to 1-}|f(z)| = +\infty$ невозможно.

б) Показать, что всякая функция $f\in Hol(\mathbb{D})$, для которой выполнено $\displaystyle\limsup_{r\to 1-}\inf_{|z|=r}|f(z)| = +\infty$ принимает все свои значения бесконечное число раз.

$*$) Показать, что для функции $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}5^n z^{(2n)!}$ выполнено равенство $\displaystyle\limsup_{r\to 1-}\inf_{|z|=r}|f(z)| = +\infty$.

7. Вычислив и оценив интеграл $\displaystyle\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz$ при $|a|<R$ и $|b|<R$ доказать теорему Лиувилля: ограниченная и голоморфная функция в $\mathbb{C}$ является константой.

•8. а) Пусть G — область в $\mathbb{C}$, а X — компакт в G. Доказать, что для любой функции $f\in Hol(G\setminus X)$ существуют две функции $f_1\in Hol(G)$ и $f_2\in Hol(\mathbb{C}_\infty\setminus X)$ такие, что $f = f_1 - f_2$ на $G\setminus X$. Показать, что функции f_1 и f_2 определяются по f однозначно, с точностью до общей аддитивной постоянной.

б) Пусть G — область в $\mathbb{C}$, а X — компакт в G, и пусть для любого $\varepsilon>0$ компакт X можно покрыть конечным числом кругов, сумма радиусов которых не превосходит ε. Показать, что множество X устранимо для голоморфных ограниченных функций, т.е. для любой ограниченной функции $f\in Hol(G\setminus X)$ найдется функция $F\in Hol(G)$ такая, что $F|_{G\setminus X} = f$.

9. а) Обозначим через $H^\infty(\Omega)$ класс всех голоморфных и ограниченных на открытом множестве Ω функций. Пусть $E = \mathbb{C}\setminus[0,1]$. Построить функцию $f\in H^\infty(E)$, для которой не существует функции $F\in Hol(\mathbb{C})$ такой, что $F|_E = f$.

б) Построить функцию $f\in H^\infty(\mathbb{D})$ такую, что $f\notin C(\overline{\mathbb{D}})$.

•10. Пусть $E = 2\mathbb{D}\setminus\overline{\mathbb{D}}$, т.е. $E = \{1<|z|<2\}$. Пусть $f\in Hol(E)$ такова, что для каждого $n\in\mathbb{N}$ найдется функция $g_n\in Hol(E)$ такая, что $g_n^{(n)} = f$ в E. Доказать, что существует функция $F\in Hol(2\mathbb{D})$ такая, что $F|_E = f$.