Классфикация накрытий

9◇1. Докажите, что условие полулокальной односвязности пространства X необходимо для существования односвязного накрывающего пространства $\widetilde{X}$.

▷ Пространство X *локально односвязно*, если у любой точки $x \in X$ и любой её окрестности U найдётся односвязная односвязная окрестность $V \subset U$.

9◇2. Постройте пример **а)** не полулокально односвязного пространства; **б)** полулокально односвязного, но не локально односвязного пространства.

9◇3. Докажите, что имеется взаимно однозначное соответствие между классам изоморфных накрытий $p\colon Y \to X$ и классами сопряжённости подгрупп в $\pi_1(X, x_0)$.

9◇4. Пусть $G \subset F_2$ — подгруппа свободной группы ранга 2 (с образующими a и b), состоящая из слов чётной длины. Найдите ранг группы G. Опишите накрытие над букетом $S^1 \vee S^1$, реализующие подгруппу G в $\pi_1(S^1 \vee S^1) = F_2$.

9◇5. Пусть $G = [F_2, F_2] \subset F_2$ — коммутант свободной группы ранга 2. Докажите, что G — свободная группа бесконечного ранга. Опишите накрытие над букетом $S^1 \vee S^1$, реализующие подгруппу G в $\pi_1(S^1 \vee S^1) = F_2$.

9◇6. Пусть $a, b \in \pi_1(S^1 \vee S^1)$ — образующие, соответствующие двум слагаемым S^1. Опишите накрывающее пространство букета $S^1 \vee S^1$, соответствующее нормальной подгруппе, порождённой элементами $a^2, b^2, (ab)^4$.

9◇7. Группа свободной группы с двумя образующими содержит в качестве подгруппы свободную группу с любым числом образующих.

9◇8. Докажите, что максимальное дерево максимально в том смысле, что оно не содержится ни в каком большем дереве.