Накрытия

8◇0. Любой ли сюръективный локальный гомеоморфизм является накрытием?

8◇1. Постройте накрытие букета 2 окружностей пространством, гомотопически эквивалентным букету n окружностей при $n \geqslant 2$. Постройте накрытие поверхности S_2 (кренделя) поверхностью S_g (сферой с g ручками) при $g \geqslant 2$.

8◇2. Пусть X — линейно связное, локально линейно связное пространство с конечной фундаментальной группой. Докажите, что любое отображение $X \to S^1$ гомотопно постоянному.

8◇3. Докажите, что для накрытия $p\colon \widetilde{X} \to X$ и любых точек $x, x' \in X$ имеется взаимно однозначное соответствие между дискретными множествами $p^{-1}(x)$ и $p^{-1}(x')$.

Мощность множества $p^{-1}(x)$ называется *числом листов накрытия* p.

▷ Накрытие $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ называется *регулярным*, если $p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ — нормальная подгруппа в $\pi_1(X, x_0)$.

8◇4. а) Докажите, что двулистные накрытия регулярны.
б) Постройте пример нерегулярного трёхлистного накрытия над букетом двух окружностей и над кренделем.
в) Докажите, что накрытие регулярно тогда и только тогда, когда никакая петля в базе не является образом одновременно замкнутого пути и незамкнутого пути в тотальном пространстве.

▷ Действие группы G на X называется *свободным*, если для любых $g \neq e$ и $x \in X$ выполнено $gx \neq x$.
Действие называется *дискретным*, если каждая точка $x \in X$ обладает такой окрестностью U, что множества gU, $g \in G$, попарно не пересекаются.

8◇5. а) Докажите, что если $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ — регулярное накрытие, то существует свободное действие группы $G = \pi_1(X, x_0)/p_*\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ на пространстве $\widetilde{X}$, такое, что $X = \widetilde{X}/G$ (точнее, орбиты действия совпадают с множествами $p^{-1}(x)$).
б) Докажите, что если группа G действует на Y свободно и дискретно, то естественная проекция $p\colon Y \to X = Y/G$ является регулярным накрытием. Более того, в этом случае $\pi_1(X)/p_*\pi_1(Y) = G$.

8◇6. Постройте односвязное накрывающее над **а)** $S^1 \vee S^2$, **б)** $S^1 \vee S^1$, **в)** $\mathbb{R}P^2 \vee \mathbb{R}P^2$.