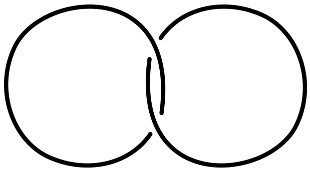
Расслоения

10◇1. а) Докажите, что отображение $p\colon S^{2n+1} \xrightarrow{(z_0,\dots,z_n)\mapsto[z_0:\ldots:z_n]} \mathbb{C}P^n$ является нетривиальным локально тривиальным расслоением со слоем S^1.

▷ Оно также называется *расслоением Хопфа.*

б) Докажите, что слои расслоения Хопфа $S^3 \to S^2$ — зацепленные окружности.

▷ Соответствующее зацепление называется *зацеплением Хопфа.*



10◇2 (теорема Фельдбау). Локально тривиальное расслоение над кубом I^k тривиально.
а) Пусть $I^k_1 = \{x_k \leqslant \frac{1}{2}\}$ и $I^k_2 = \{x_k \geqslant \frac{1}{2}\}$. Покажите, что если расслоение тривиально над I^k_1 и I^k_2, то и всё расслоение тривиально.
б) Докажите теорему Фельдбау, разбив куб I^k на маленькие кубы, над каждым из которых расслоение тривиально.

10◇3. Докажите, что все слои расслоения в смысле Гуревича гомотопически эквивалентны.

10◇4. Докажите, что вложение верхнего основания цилиндра $i\colon X \to X \times I$, $x \mapsto (x,1)$, является корасслоением.

10◇5. а) Докажите, что вложение точки в CW-комплекс является корасслоением.
б) Приведите пример пространства с отмеченной точкой, для которого вложение отмеченной точки не является корасслоением.

10◇6. а) Докажите, что разложение отображения в композицию гомотопической эквивалентности и расслоения естественно в следующем смысле: коммутативная диаграмма отображений

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"'] \\
Y \arrow[r] & Y'
\end{tikzcd}$$

приводит к коммутативной диаграмме разложений

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr] \arrow[dd, "f"'] \arrow[dr, "h"] & & X' \arrow[dd, "f'"'] \arrow[dr, "h'"] & \\
& \widetilde{X} \arrow[rr] \arrow[dl, "p"] & & \widetilde{X'} \arrow[dl, "p'"] \\
Y \arrow[rr] & & Y' &
\end{tikzcd}$$

б) Сформулируйте и докажите аналогичное свойство естественности для разложения в композицию вложения и гомотопической эквивалентности.

▷ Пусть отображение $f\colon X \to Y$ представлено в виде композиции $f = p \circ h$, где $h\colon X \to \widetilde{X}$ — гомотопическая эквивалентность, а $p\colon \widetilde{X} \to Y$ — расслоение.
Пространство, гомотопически эквивалентное слою расслоения $p\colon \widetilde{X} \to Y$ называется *гомотопическим слоем* отображения f и обозначается $\operatorname{hofib} f$.

10◇7. Докажите, используя естественность конструкции $\widetilde{X}$, что гомотопический слой определён корректно: для любого другого разложения $f = p' \circ h'$ в композицию гомотопической эквивалентности h' и расслоения p' пространство $\operatorname{hofib} f$ гомотопически эквивалентно слою расслоения p'.

10◇8. Докажите, что гомотопический слой отображения $f\colon X \to Y$ есть пространство F, входящее в декартов квадрат

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d] & PY \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

где $PY \to Y$ — расслоение путей.

▷ Пусть отображение $f\colon X \to Y$ представлено в виде композиции $f = h \circ i$, где $i\colon X \to \widehat{Y}$ — корасслоение, а $h\colon \widehat{Y} \to Y$ — гомотопическая эквивалентность.
Фактор-пространство $G = \widehat{Y}/i(X) = \widehat{Y}/(X \times 1)$ пространства $\widehat{Y} = (X \times I) \cup_f Y$ по его верхнему основанию называется *конусом отображения* $f\colon X \to Y$. Пространство, гомотопически эквивалентное конусу отображения f называется его *гомотопическим кослоем.*
Таким образом, мы имеем кодекартов квадрат

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ CX \arrow[r] & G \end{tikzcd}$$

где $X \to CX$ — вложение X в основание конуса.

10◇9. Проверьте корректность определения гомотопического кослоя.

10◇10. Найдите гомотопический слой вложений **а)** $pt \hookrightarrow X$, **б)** $S^1 \vee S^1 \hookrightarrow S^1 \times S^1$, **в)** $\mathbb{C}P^\infty \vee \mathbb{C}P^\infty \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty$.

10◇11. Найдите гомотопический кослой проекции в точку $X \to pt$.

10◇12. Докажите, что гомотопические эквивалентности $h\colon X \to \widetilde{X}$ и $h\colon \widehat{Y} \to Y$ из теоремы о факторизации отображения являются соответственно корасслоением и расслоением в смысле Серра.