Гомотопические группы и гомотопическая эквивалентность

Задача 4.0. Если A — стягиваемый подкомплекс CW-комплекса X, то $X \cong X/A$.
Указание. Отображение $X/A \to X$ поможет построить лемма Борсука.

Задача 4.1. a_0) Если X — связное клеточное пространство, то оно гомотопически эквивалентно пространству с одной 0-мерной клеткой.

а) Если X — связное *n-связное* клеточное пространство ($\pi_{\leqslant n}(X) = 0$), то X гомотопически эквивалентно пространству с одной 0-мерной клеткой и без клеток размерностей $1, \ldots, n$.

Указание. Если у X нет клеток до размерности n, а каждая n-клетка является границей $(n+1)$-клетки, то утверждение сразу следует из предыдущей задачи.

б) Докажите относительный вариант предыдущего утверждения: если A — связный клеточный подкомлпекс связного клеточного комплекса X и все относительные гомотопические группы $\pi_i(X, A)$ тривиальны, то вложение A в X является гомотопической эквивалентностью.

Задача 4.2. Любое отображение $f\colon A \to X$ гомотопически эквивалентно вложению, а именно вложению A в *цилиндр* $\mathrm{Cyl}(f) := (A \times [0;1]) \sqcup X/\big((a,1) \sim f(a)\big)$.

Задача 4.3. а) Если X — связное клеточное пространство, все гомотопические группы которого тривиальны, то оно стягиваемо.

б) Если отображение $A \to X$ связных клеточных комплексов индуцирует изоморфизм во всех гомотопических группах, то оно является гомотопической эквивалентностью.

Задача 4.4. У пространств $\mathbb{R}P^m \times S^n$ и $\mathbb{R}P^n \times S^m$ совпадают все гомотопические группы. (Позже мы увидим, что они, тем не менее, гомотопически не эквивалентны.)