

Независимый Московский Университет, Когомологии
алгебраических многообразий, весна 2018

4

4.1. Постройте "триангуляцию" окружности с произвольным числом вершин ≥ 3 . Введите обозначения, позволяющие вычислить соответствующие гомологии с коэффициентами в \mathbb{Z} .

4.2. Триангулируйте двумерную сферу и вычислите её гомологии с коэффициентами в \mathbb{Z} .

4.3. Триангулируйте трёхмерную и четырёхмерную сферы и вычислите их гомологии с коэффициентами в \mathbb{Z} .

4.4. Триангулируйте двумерный тор и вычислите его гомологии с коэффициентами в \mathbb{Z} .

4.5. Триангулируйте поверхность рода 2 и вычислите её гомологии с коэффициентами в \mathbb{F}_2 .

4.6. Триангулируйте вещественную проективную плоскость $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ и вычислите её гомологии с коэффициентами в \mathbb{Z} .

4.7. Триангулируйте бутылку Клейна и вычислите её гомологии с коэффициентами в \mathbb{Z} .

4.8. Пусть коника $\mathbf{Q}(\mathbb{k})$ задаётся в проективной плоскости $\mathbb{P}_2(\mathbb{k})$ уравнением $x^2 + y^2 = z^2$. Вычислите группы $H_\bullet(\mathbf{Q}(\mathbb{R}); \mathbb{Z})$ и $H_\bullet(\mathbf{Q}(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$. Установите связь между ними.

4.9*. Пусть кубика $\mathbf{E}(\mathbb{k})$ задаётся в проективной плоскости $\mathbb{P}_2(\mathbb{k})$ уравнением $x^3 + y^3 + z^3 = 0$. Вычислите группы $H_\bullet(\mathbf{E}(\mathbb{R}); \mathbb{Z})$ и $H_\bullet(\mathbf{E}(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$. Установите связь между ними.

4.10**. Пусть кубическая поверхность $\mathbf{S}(\mathbb{k})$ задаётся в проективном пространстве $\mathbb{P}_3(\mathbb{k})$ уравнением $t^3 + x^3 + y^3 + z^3 = 0$. Дайте какие-нибудь оценки рангов групп $H_k(\mathbf{S}(\mathbb{R}); \mathbb{Z})$ и $H_k(\mathbf{S}(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$.

Комментарий. По-видимому, точное вычисление рангов этих групп "ручными" средствами практически невозможно.

29 марта, Г.Б. Шабат