Листок 4.

Множество X с заданной на нем функцией $\varrho\colon X\times X \mapsto [0,+\infty)$ называется метрическим пространством, если выполняются условия: 1) $\varrho(x,y)=0 \iff x=y$, 2) $\varrho(x,y)=\varrho(y,x)$ и 3) $\varrho(x,y)\le\varrho(x,z)+\varrho(z,y)$. Открытым шаром $B(a,r)$ в (X,ϱ) называют множество $\{x\colon \varrho(a,x)<r\}$, а замкнутым шаром $\overline{B}(a,r)$ – множество $\{x\colon \varrho(a,x)\le r\}$.

Задача 1. Докажите, что следующие пары (X,ϱ) являются метрическими пространствами:

(a) X – произвольное непустое множество, $\varrho(x,y)=1$ при $x\ne y$;

(b) $X=\mathbb{R}$, $\varrho(x,y)=|x-y|$;

(c) $X=Q$, $\varrho(x,y)=\|x-y\|_p$, где $\|\cdot\|_p$ – p-адическая норма;

(d) $X=\mathbb{R}$, $\varrho(x,y)=|f(x)-f(y)|$, где f – возрастающая функция;

(e) $X=\mathbb{R}^n$, $\varrho(x,y)=\Big(\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|^p\Big)^{1/p}$, $p\ge1$;

(f) $X=\{0,1\}^n$, $\varrho(x,y)=\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|$;

(g) $X=\{0,1\}^\infty$, $\varrho(x,y)=\sum_{i=1}^\infty 2^{-i}|x_i-y_i|$.

(h) $X=l_p=\{(x_1,x_2,\ldots)\colon \sum_{i=1}^\infty|x_i|^p<\infty\}$, $\varrho(x,y)=\Big(\sum_{i=1}^\infty|x_i-y_i|^p\Big)^{1/p}$, $p\ge1$.

(i) $X=C[a,b]$, $\varrho(f,g)=\Big(\int_a^b|f-g|^p\,dx\Big)^{1/p}$, $p>1$.

(j) $X=B(Y)$ – множество ограниченных функций на множестве Y, $\varrho(f,g)=\sup_Y|f-g|$.

Нарисуйте шар $B(0,1)$ в пунктах (b), (c), (d), (e).

Задача 2. Пусть $\varrho(A,B)=\lambda(A\Delta B)$, где $A\Delta B=(A\bigcup B)\setminus(A\bigcap B)$, и X – все измеримые по Лебегу подмножества отрезка $[0,1]$. Является ли (X,ϱ) метрическим пространством? Если нет, то что надо исправить?

Задача 3. Пусть $X=\{0,1\}^n$, $\varrho(x,y)=\sum_j|x_j-y_j|$.

(a) Найдите число элементов в шаре радиуса k.

(b) Докажите, что при $n=2^m-1$ булев куб $X=\{0,1\}^n$ можно представить в виде объединения непересекающихся шаров единичного радиуса, а при других значениях n этого сделать нельзя.

(c) (код Хэмминга) Используя предыдущую задачу укажите способ передачи последовательности из 0 и 1, при котором по полученной последовательности можно было исправить ровно одну ошибку, т. е. узнать в каком бите произошла эта ошибка. Оцените количество добавленных символов.

Последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства (X,ϱ) сходится к x, если $\varrho(x_n,x)\to0$ при $n\to\infty$. Последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию Коши или является фундаментальной, если для всякого $\varepsilon>0$ найдется номер N такой, что $\varrho(x_n,x_m)<\varepsilon$ для всех $n,m>N$. Метрическое пространство называется полным, если всякая фундаментальная последовательность его элементов имеет предел.

Задача 4.

(a) Опишите все сходящиеся последовательности в пространстве из пункта (a) первой задачи.

(b) Докажите, что предел последовательности определен единственным образом и предел подпоследовательности совпадает с пределом последовательности.

(c) Какие из пространств задачи 1 являются полными?

Две метрики ϱ и σ на X называются эквивалентными, если $\varrho(x_n,x)\to0 \iff \sigma(x_n,x)\to0$ для всякой последовательности x_n.

Задача 5. Пусть g – непрерывная и вогнутая функция на $[0,+\infty)$, причем $g(0)=0$ и $g(x)>0$ при $x>0$. Докажите, что для всякой метрики ϱ, функция $g(\varrho)$ также является метрикой, причем метрика эквивалентна старой. Проверьте, что можно в качестве g взять $g(t)=\frac{t}{1+t}$, $g(t)=\operatorname{arctg}t$.

Задача 6. (a) Приведите пример двух неэквивалентных метрик.

(b) Приведите пример двух эквивалентных метрик ϱ и σ, для которых не существует функции f на $[0,+\infty)$ такой, что $f(0)=0=\lim_{t\to0}f(t)$ и $\varrho(x,y)\le f(\sigma(x,y))$ для всех $x,y\in X$.

(c) Пусть на X заданы две эквивалентные метрики ϱ и σ. Предположим, что из всякой последовательности элементов $x_n\in X$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Докажите, что существуют функции f,g на $[0,+\infty)$ такие, что $f(0)=0=\lim_{t\to0}f(t)$, $g(0)=0=\lim_{t\to0}g(t)$ и выполняются неравенства $\varrho(x,y)\le f(\sigma(x,y))$ и $\sigma(x,y)\le g(\varrho(x,y))$. для всех $x,y\in X$.

Задача 7. Рассмотрим множество $C_0(\mathbb{R})$ непрерывных функций φ на $\mathbb{R}$, каждая из которых равна нулю вне некоторого отрезка. Скажем, что последовательность φ_n сходится к φ, если существует отрезок I, вне которого все функции φ_n, φ равны нулю, и φ_n равномерно сходится к φ на I. Докажите, что не существует метрики ϱ на $C_0(\mathbb{R})$, задающей такую сходимость функций.

Множество U в (X, ϱ) называется открытым, если для всякой точки $a \in U$ найдется шар $B(a, r) \subset U$. Множество F замкнуто, если его дополнение открыто. Определение внутренних, граничных и предельных точек в метрическом пространстве не отличается от соответствующих определений на числовой прямой.

Задача 7. (a) Докажите, что открытый шар является открытым множеством, а замкнутый шар является замкнутым множеством.

(b) Докажите, что любое объединение и конечное пересечение открытых множеств является открытым; любое пересечение и конечное объединение замкнутых множеств является замкнутым множеством.

Замыканием множества E в (X, ϱ) называется множество $\overline{E} = \bigcap_{E \subset F} F$ – пересечение всех замкнутых множеств, содержащих E. Таким образом, замыканием E является наименьшим по включению замкнутым множеством, содержащим E.

Задача 8.

(a) Докажите, что $\overline{E} = E \bigcup \{\text{граничные точки}\} = E \bigcup \{\text{предельные точки}\}$.

(b) Покажите, что F – замкнуто тогда и только тогда, когда $F = \overline{F}$.

(c) Верно ли, что $\overline{B(a, r)} = \overline{B}(a, r)$?

Множество $A \subset B$ всюду плотно в множестве B, если $B \subset \overline{A}$. Если в метрическом пространстве X есть не более чем счетное всюду плотное подмножество, то X называется сепарабельным метрическим пространством.

Задача 9. Какие пространства из задачи 1 являются сепарабельными?

Задача 10. Докажите, что замкнутое подмножество полного пространства является полным пространством.

Задача 11. Докажите, что в полном пространстве всякая последовательность шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет общую точку. Покажите на примере, что отказаться от стремления к нулю радиусов нельзя.

Задача 12. Докажите теорему Бэра: если полное метрическое пространство является объединением не более чем счетного набора замкнутых множеств, то хотя бы одно из этих множеств содержит открытый шар положительного радиуса.

Множество X с выделенной системой подмножеств τ называется топологическим пространством, если 1) $\emptyset, X \in \tau$, 2) пересечение всяких двух множеств из τ входит в τ, 3) объединение всякого набора множеств из τ входит в τ. Множества из τ называются открытыми, а само семейство τ называется топологией. База топологии – такая система открытых множеств, что их объединения дают все открытые множества.

Типичным примером топологического пространства является метрическое пространство.

Задача 13. Докажите, что топология сепарабельного метрического пространства имеет счетную базу.

Последовательность x_n элементов топологического пространства сходится к элементу x, если для всякого открытого множества U, содержащего x, найдется номер N такой, что $x_n \in U$ для всех $n > N$.

Задача 14. Приведите пример топологического пространства и последовательности его элементов, имеющей более одного предела.

Задача 15. Пусть $\mathbb{R}^T$ – пространство функций $f\colon T \mapsto \mathbb{R}$, где T – непустое множество. Топология задана базой множеств вида

$$U_{f,t_1,\ldots,t_n,\varepsilon} = \{g \in \mathbb{R}^T\colon |g(t_i) - f(t_i))| < \varepsilon, i = 1, \ldots, n\}.$$

Докажите, что

(a) f_n сходится к f в данной топологии тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ $\forall t \in T$;

(b) если T – не более чем счетное множество, то данная топология метризуема;

(c) если T более чем счетно, то данную топологию нельзя задать метрикой.

Частично упорядоченное множество T называется *направленным*, если для всяких $t, s \in T$ найдется $u \in T$ такое, что $t \leq u$ и $s \leq u$. Набор элементов $\{x_t\}_{t\in T}$, индексируемых направленным множеством T, называется направленностью. Направленность $\{x_t\}_{t\in T}$ называется поднаправленностью $\{y_s\}_{s\in S}$, если сущестует такое отображение $\pi\colon T \mapsto S$, что $x_t = y_{\pi(t)}$ и для всякого $s_0 \in S$ найдется $t_0 \in T$, что $\pi(t) \geq s_0$ для всех $t \geq t_0$. Направленность $\{x_t\}_{t\in T}$ сходится к элементу x, если для всякого открытого множества U, содержащего x, найдется t_0 такое, что $x_t \in U$ для всех $t \geq t_0$.

Задача 16. Приведите пример направленности $\{x_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ элементов $\mathbb{R}$ с обычной топологией, которая сходится к нулю, но бесконечно много ее элементов лежит вне $(-1, 1)$.

Задача 17. Докажите, что для всякой предельной точки a некоторого множества E (всякое открытое множество, содержащее a, содержит отличный от a элемент множества E) найдется направленность из элементов E, сходящаяся к a. Приведите пример предельной точки, для которой нет сходящейся к ней последовательности элементов E.

Задача 18. Докажите, что не существует топологии, задающей сходимость почти всюду функций на отрезке $[0, 1]$. Говорят, что $f_n \to f$ почти всюду на $[0, 1]$, если мера Лебега множества точек $x \in [0, 1]$, в которых $f_n(x)$ не сходится к $f(x)$, равна нулю.