•1. Какие линии и множества на комплексной плоскости задаются следующими соотношениями:

$$\operatorname{Re} z^4 > \operatorname{Im} z^4; \qquad \big||z-a_1| - |z-a_2|\big| = 2r \ \text{ при } \ a_1, a_2 \in \mathbb{C},\ r > 0;$$

$$0 < \arg \frac{i-z}{z+i} < \frac{\pi}{2}; \qquad \operatorname{Re}(z(1-i)) < \sqrt{2}.$$

2. Найдите ошибку в рассуждении:

$$z^2 = (-z)^2 \Rightarrow \operatorname{Arg}(z^2) = \operatorname{Arg}\left((-z)^2\right) \Rightarrow 2\operatorname{Arg} z = 2\operatorname{Arg}(-z) \Rightarrow \operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg}(-z) \Rightarrow \operatorname{Arg} i = \operatorname{Arg}(-i)$$

(последнее утверждение в этой цепочке, очевидно, неверно).

3. (i) Докажите, что последовательность $\{e^{in} \colon n = 1, 2, \ldots\}$ расходится. (ii) Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} e^{2\pi e n! i} = 1.$$

4. Доказать, что множество всех корней производной $P'(z)$ произвольного многочлена $P(z) = a_0 \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$ лежат в выпуклой оболочке точек z_k, $k = 1, \ldots, n$ (корней многочлена P).

•5. Пусть $\gamma \colon [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — путь.

(i) Доказать, что (многозначная) функция $\operatorname{Arg}(\gamma(t))$ распадается над всем отрезком $[0,1]$ на счетное множество непрерывных ветвей φ_j, $j \in \mathbb{Z}$, причем любые из этих двух ветвей отличаются друг от друга на аддитивную постоянную, кратную 2π.

Обозначим $\Delta_\gamma \operatorname{Arg} z := \varphi_j(1) - \varphi_j(0)$.

(ii) Доказать, что функция $\Delta_{(\gamma-a)} \operatorname{Arg} z$ непрерывна по a вне множества $[\gamma] := \{\gamma(t) \colon t \in [0,1]\}$ (носителя пути γ).

6. Найти в каких точках комплексной плоскости (комплексно) дифференцируемы и в каких голоморфны следующие функции и вычислить их производные:

$$\operatorname{tg}(z); \qquad \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right); \qquad z \operatorname{Re} z + \overline{z} \operatorname{Im} z + \overline{z}.$$

•7. Пусть f — функция, голоморфная в некоторой области $G \subset \mathbb{C}$. Доказать, что если одна из следующих функций:

$$\operatorname{Re} f; \quad \operatorname{Im} f; \quad |f|; \quad \arg f$$

постоянна в G, то и f постоянна в G.

8. Пусть f — голоморфная функция. Выразить через f и f' следующие функции:

$$\frac{\partial}{\partial z}\big(|f(z)|\big), \quad \frac{\partial}{\partial z}\big(\operatorname{Re} f(z)\big), \quad \frac{\partial}{\partial z}\big(\operatorname{Im} f(z)\big).$$

•9. Пусть функция f вещественно дифференцируема в точке z_0. Доказать, что множество предельных значений выражения

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

при $z \to z_0$ образует окружность с центром в точке $f'_z(z_0)$ и радиусом $|f'_{\overline{z}}(z_0)|$.

10. (i) Пусть u — гармоническая функций. Для каких функций g функция $g \circ u$ будет тоже гармонической? (ii) Пусть f — голоморфная функция (в некоторой области). Будут ли гармоническими следующие функции: $|f(z)|$, $\arg f(z)$, $\log |f(z)|$?