Рассмотрим два подхода, у которых даже пропозициональные семантики используют кванторы существования

Интуиционизм

По разделу 2.4 учебника Верещагина и Шеня.

Модальные логики

В модальных логиках к обычному языку исчисления высказываний добавляется символ $\Box$. Его можно ставить перед формулой, при этом опять получается формула. Также используется символ $\Diamond$, он находится с $\Box$ в том же отношении, что и квантор $\exists$ с квантором $\forall$: можно считать, что он является сокращением для $\not\Box\,.\!\!\not\;$

Для модальных логик тоже используются шкалы Крипке. В отличие от интуиционизма, мы можем накладывать на достижимость разные условия, не обязательно свойства частичного порядка.

Опишем семантику. Истинность атомарных высказываний независимо (в отличие от интуиционизма) определяется в каждом мире. Все связки вычисляются в каждом мире классическим образом, тоже независимо.

Модальность имеет следующую семантику: в мире a выполнено $\Box\varphi$ тогда и только тогда когда в любом мире b, в который можно попасть из a за один шаг, выполнено φ. В интуиционизме отношение достижимости было транзитивным и можно было считать, что если путь существует, то он состоит из одного шага; здесь это не всегда так, и нас интересует именно непосредственная достижимость.

Истинность формулы --- это её истинность во всех мирах всех возможных моделей.

Для иллюстрации семантики, покажем, как соответствуют некоторые наборы аксиом утверждениям о свойствах достижимости.

Наборы условий на граф:

K := нет условий

D := за каждым есть следующий

T := рефлексивность

S4 := рефлексивность и транзитивность

S5 := отношение эквивалентности

Схемы аксиом и правила вывода:

N, правило введения необходимости: если доказуемо p, доказуемо $\Box p$.

K : $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

T, рефлексивность: $\Box p \to p$

4: $\Box p \to \Box\Box p$

B: $p \to \Box\Diamond p$

D: $Boxp \to \Diamond p$

5: $\Diamond p \to \Box\Diamond p$

N и K выполнены для всех графов. Действительно, если формула верна везде, то она верна и во всех мирах, достижимых из данного. Если в каком-то мире оказалось, что во всех достижимых мирах, где выполнено p, верно q, и притом во всех достижимых мирах верно p, то в них верно и q.

T описывает рефлексивность графа: каждая вершина достижима из самой себя. Если это не так, то можно взять вершину, недостижимую из самой себя, установить в ней $\not p$, а во всех остальных вершинах p и получить опровержение формулы. Но если достижимость рефлексивна, то везде, где верно $\Box p$ должно быть верно и p.

Аксиома 4 задаёт транзитивность достижимости.

S5 := T + 4 + 5 задаёт достижимость, являющуюся отношением эквивалентности.

Аксиома D утверждает, что из каждого мира достижимо хотя бы что-нибудь.

Аксиома B задаёт симметричные отношения. Если отношение симметрично, то из каждого достижимого мира можно пройти обратно; если у нас в текущем мире верно p, то из каждого достижимого мира достижим хотя бы один (текущий) мир с выполненным p. Для несимметричного отношения, достаточно, чтобы p выполнялось только в одном мире a модели, причём для какого-то мира b, достижимого из мира a, мир a недостижим из мира b.