В прошлый раз был задан вопрос, подразумевающий, что можно аксиоматизировать теорию множеств. Приведём пример такой аксиоматики. Не будем пытаться максимально ослабить аксиомы, вместо этого рассмотрим более сильные формулировки, с которыми легче работать.

Базовые сведения по теории множеств см. также в начале конспекта Верещагина по методу вынуждения, разделы 0.1 -- 0.6.

В сигнатуре у нас будут предикат равенства, $a = b$, и предикат принадлежности, $a \in b$.

Нулевым пунктом запишем стандартные аксиомы равенства.

$a = a; (a = b \wedge b = c) \to a = c; a = b \to b = a;$

(равенство является отношением эквивалентности)

$(a = b \wedge c = d) \to (a \in c \leftrightarrow b \in d)$

(замена объектов на равные сохраняет значение предикатов).

Мы не можем определить совпадение объектов в языке первого порядка, так что мы просто делаем максимум возможного: говорим, что равные объекты совпадают для всех интересующих нас целей. Модели, в которых предикат равенства интерпретируется, как совпадение элементов носителя, называются нормальными.

Аксиомы собственно теории множеств взяты по разделу 0.1 конспекта Верещагина.

Если выкинуть аксиому бесконечности, то существует такая модель: носитель --- натуральные числа, $n \in m$ тогда и только тогда когда n-я цифра двоичного разложения (коэффициент при 2^n) числа m равна 1.

Обсуждалась сравнимость любых двух ординалов (см. разделы 0.2 и 0.3 конспекта Верещагина), существование множества натуральных чисел.

После этого был сформулирован вопрос с предыдущей лекции: рассмотрим аксиомы теории множеств, построим счётную модель. В теории множеств можно доказать существование несчётного множества. С другой стороны, в счётной модели можно предъявить его и все его элементы. На самом деле, существует отображение (множество пар) во внешнем смысле, показывающее счётность этого множества, но внутри модели оно не является множеством --- это какие-то пары, которые нельзя никак описать или выделить.

Заметим ещё, что натуральных чисел в модели больше, чем ``внешних'' натуральных чисел, так как формулу с n-кратным прибавлением единицы легко написать; но множеств внутри модели меньше, чем внешних множеств, так как набор элементов любого множества любой модели является множеством во внешнем смысле.