

Преобразование Фурье

A7.1. Отождествим групповую алгебру $\mathbb{C}G$ с пространством $\mathbb{C}[G]$ функций на G : базисный элемент e_g соответствует *дельта-функции*, равной 1 в точке g и нулю во всех остальных точках. Докажите, что умножение на $\mathbb{C}G$ при этом соответствует *свёртке* $*$ функций, определяемой по правилу

$$(\varphi * \psi)(g) = \sum_{h \in G} \varphi(h)\psi(h^{-1}g).$$

Если $\rho: G \rightarrow \mathrm{GL}(V_\rho)$ — представление, а ϕ — функция на G , определим *преобразование Фурье* $\widehat{\phi}(\rho)$ в $\mathrm{End}(V_\rho)$ при помощи формулы

$$\widehat{\phi}(\rho) = \sum_{g \in G} \phi(g) \cdot \rho(g).$$

A7.2. Докажите, что $\widehat{\varphi * \psi}(\rho) = \widehat{\varphi}(\rho) \cdot \widehat{\psi}(\rho)$.

A7.3. Докажите *формулу обращения Фурье*

$$\varphi(g) = \frac{1}{\#G} \sum_{\rho} \dim V_{\rho} \cdot \mathrm{Tr}(\rho(g^{-1}) \cdot \widehat{\varphi}(\rho)),$$

где сумма берется по всем неприводимым представлениям ρ группы G .

A7.4. Докажите *формулу Планшиереля* для функций φ и ψ на группе G :

$$\sum_{g \in G} \varphi(g^{-1})\psi(g) = \frac{1}{\#G} \sum_{\rho} \dim V_{\rho} \cdot \mathrm{Tr}(\widehat{\varphi}(\rho) \cdot \widehat{\psi}(\rho)).$$

Индукированные представления

A7.5. а) Для каждого неприводимого представления V группы \mathfrak{S}_3 разложите в прямую сумму неприводимых представление $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_3}^{\mathfrak{S}_4} V$.

б) Тот же вопрос для подгруппы вращений в группе симметрий квадрата.

A7.6. а) В каких случаях представление группы $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_p)$ аффинных преобразований прямой над полем из p элементов, индуцированное с одномерного представления группы параллельных переносов, неприводимо?

б) Опишите все неприводимые комплексные представления группы $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}_p)$.

A7.7. p -группа Гейзенберга Heis_p задана образующими a, b, c и определяющими соотношениями $ac = ca, bc = cb, ab = cba, a^p = b^p = c^p = e$.

а) Покажите, что группа Heis_p имеет порядок p^3 и изоморфна группе унитарных матриц 3×3 над полем из p элементов.

б) В каких случаях представление группы Heis_p , индуцированное с одномерного представления абелевой подгруппы $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, порожденной a и c , неприводимо?

в) Опишите все неприводимые комплексные представления группы Heis_p .