НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 12.
Характеристические классы. 16.05.2011.

Задача 1. Пусть η вещественное расслоение, $\mathbb{C}\otimes\eta$ его комплексификация. Докажите, что $c_{2k+1}(\mathbb{C}\otimes\eta)=0$, $c_{2k}(\mathbb{C}\otimes\eta)=(-1)^k p_k(\eta)$.

Указание. Посмотрите на полный класс Чженя и воспользуйтесь образующими У.

Задача 2. Пусть ранг комплексного векторного расслоения ξ равен k. Выразите $c_1(\det\xi)=c_1(\Lambda^k\xi)$ через классы Чженя расслоения ξ.

Задача 3. Пусть ξ комплексное расслоение, $r\xi$ его овеществление.

- Выразите $p_k(r\xi)$ через классы Чженя расслоения ξ.
- Докажите, что $\chi(r\xi)=c_n(\xi)$.

Указание. Посмотрите на полный класс Понтрягина и воспользуйтесь образующими У.

Задача 4. Для ориентированной поверхности в евклидовом пространстве $M^2\hookrightarrow\mathbb{R}^3$ выразить классы Эйлера и Понтрягина через первую и вторую квадратичные формы.

Указание. Не забывайте про формулу Уитни для классов Понтрягина!

Задача 5. Докажите, что если у комплексного расслоения ξ есть k не обращающихся в ноль и независимых в каждой точке сечений, то $c_n(\xi)=0$, $\dots$, $c_{n-k+1}(\xi)=0$.

Задача 6. На лекции при построении класса Эйлера $\chi(\eta)$ ориентированного вещественного расслоения η мы использовали метрику на η и связность в η. Докажите, что $\chi(\eta)$ не зависит ни от выбора метрики, ни от выбора связности. Зависит ли класс Эйлера $\chi(\eta)$ от выбора ориентации расслоения η?

Задача 7. Докажите, что если у ориентированного вещественного расслоения η есть не обращающееся в ноль сечение, то $\chi(\eta)=0$.

Задача 8. Пусть ξ комплексное расслоение. Как классы Чженя двойственного расслоения $c_i(\xi^*)$ выражаются через классы Чженя $c_i(\xi)$?

Пусть η вещественное расслоение. Как классы Понтрягина двойственного расслоения $p_i(\eta^*)$ выражаются через классы Понтрягина $p_i(\eta)$?

Задача 9. Найдите класс Чженя касательного расслоения $T\mathbb{C}P^1$ и число Чженя $\langle c_1(T\mathbb{C}P^1),[\mathbb{C}P^1]\rangle$.

Указание. Класс Чженя касательного расслоения $T\mathbb{C}P^1$ можно легко найти с помощью формулы, связывающей расслоение $(\gamma^1)^*$, двойственное к тавтологическому, и $T\mathbb{C}P^1$.

Задача 10. Докажите, что если многообразие M является границей некоторого многообразия W, то все числа Понтрягина M равны нулю.

Указание. Вспомните о функториальности классов Понтрягина и используйте теорему Стокса.