Математический анализ, 1 курс, 2008 уч.г.
Листок N 5, 12 марта 2008 года.

1. Вычислите интеграл

$$\iint\limits_A (x^2 + y)dxdy,$$

где множество A ограничено параболами $y = x^2$ и $y^2 = x$.

2. Вычислите объём единичного шара в а) $\mathbb{R}^3$; б) $\mathbb{R}^4$; в) $\mathbb{R}^n$.

3. Докажите, что

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (xy)^{xy} dxdy = \int\limits_0^1 y^y dy.$$

4. Вычислите интеграл

$$\iint\limits_{\substack{x,y\geq 0\\ x+y\leq 1}} x^p y^q dxdy,$$

где p, q – целые положительные числа.

5. Заменить тройные интегралы однократными

а) $\int\limits_0^x d\xi \int\limits_0^\xi d\eta \int\limits_0^\eta f(\zeta)d\zeta$;

б) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{x+y} f(z)dz$.

6. Найдите объём тела, вырезанного цилиндром $x^2 + y^2 = Rx$ из сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

7. Найдите силу притяжения точки массы m к однородному шару радиуса R и плотности ρ, расстояние до центра шара равно $a > R$.

Определение:назовём множество $K \subset \mathbb{R}^n$ клетчатым, если оно представляется в виде объединения конечного числа замкнутых параллелепипедов со сторонами, параллельными координатным осям.

8. Докажите, что ограниченное множество A измеримо тогда и только тогда, когда верхняя грань объёмов вписанных в него клетчатых множеств равна нижней грани объёмов описанных вокруг него клетчатых множеств.

9. Приведите пример ограниченной на прямоугольнике функции, для которой существуют оба повторных интеграла, но которая не является интегрируемой.

10. С помощью теоремы Фубини докажите, что если смешанные частные производные функции существуют и непрерывны в окрестности некоторой точки, то они не зависят от порядка вычисления.