Листок 9
ГЕОМЕТРИЯ
Другие модели плоскости Лобачевского, приложения

Чтобы сдать этот листок необходимо решить хотя бы 3 задачи. Если в задаче есть несколько пунктов, то для того, чтобы её сдать нужно решить все пункты. Задачи со звёздочкой приравниваются к двум задачам без звёздочки.

1. Выполняется ли неравенство треугольника для (псевдо)метрики Минковского?

2. *(Требуется знание линейной алгебры).* Дайте описание с помощью матриц элементов групп $O(1,n)$ и $SO(1,n)$.

3. (а) Покажите, что сдвиг T_v, определённый на лекции как

$$T_v\colon x \mapsto \frac{x+v}{xv+1},\ |v|<1,$$

действительно является биекцией отрезка $[-1,1]$, оставляющей точки -1 и 1 неподвижными, его ограничение на интервал $(-1,1)$ есть изометрия относительно гиперболического расстояния.

(б) Покажите, что композиция двух сдвигов T_{v_1} и T_{v_2} — сдвиг T_v и найдите v.

4. Сделайте рисунок, иллюстрирующий пятый постулат, в модели плоскости Лобачевского
(а) в полосе,
(б) в нижней полусфере,
(в) Ганса,
(г) на гиперболоиде.

5. Дайте детальное доказательство изоморфизмов следующих моделей:
(а) модель в нижней полусфере и модель Кэли-Клейна;
(б) модель на гиперболоиде и модель Кэли-Клейна.

6.** Постройте свою собственную модель плоскости Лобачевского: определите множество и группу, действующую на нём, определите прямые, проиллюстрируйте первые пять аксиом на Вашей модели, докажите изоморфизм Вашей модели с уже имеющимися моделями плоскости Лобачевского. Легко ли доказать в Вашей модели, что сумма углов треугольника меньше π?

7*. *Решёткой* в $\mathbb{E}^n$ называется набор в $\mathbb{E}^n$, образующий дискретную группу по сложению. Докажите, что с помощью гомотетий и изометрий $\mathbb{E}^2$ всякую решетку можно закодировать точками фигуры

$$\mathcal{M} := \{z \in \mathbb{C}_+ \mid |z| \geqslant 1,\ 0 \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant \frac{1}{2}\}.$$

Полученная фигура является частью так называемой *модулярной фигурой* или *модулярной областью.* В приложениях её рассматривают как область в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости.