

Листок 5

Задача 1. Приведите пример алгебры A и элемента $a \in A$ в ней с пустым спектром.

Задача 2. Покажите, что для $A = \text{End}(E)$ спектр элемента может состоять не только из собственных значений.

Задача 3. Приведите пример алгебры A , ее подалгебры $B \subset A$ и элемента $a \in B$, такго что $\sigma_A(a) \neq \sigma_B(a)$.

Задача 4.

(а) Приведите пример алгебры A и элементов $a, b \in A$, таких что $\sigma(ab) \neq \sigma(ba)$;

(б) Покажите, что если $\dim A < \infty$, то так не бывает.

Задача 5. Пусть E – банахово пространство, покажите, что $B(E)$ – наполненная подалгебра в $\mathcal{L}(E)$ (подалгебра ограниченных операторов в алгебре всех операторов).

Задача 6. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ попарно коммутирующие элементы алгебры A . Докажите, что их произведение обратимо тогда и только тогда, когда каждый из них обратим.

Задача 7. Докажите теорему об отображении спектра для рационального и непрерывного исчислений.

Задача 8. Докажите, что для любого морфизма банаховых алгебр $f : A \rightarrow B$ соответствующее отображение на спектрах $f^* : M(B) \rightarrow M(A)$ непрерывно.

Задача 9. Пусть A, B банаховы алгебры и B полупроста. Докажите, что любой гомоморфизм $A \rightarrow B$ непрерывен.