Листок 4

Задача 1. Докажите, что гильбертово пространство рефлексивно.

Задача 2. Пусть $T : H_1 \to H_2$ оператор между гильбертовыми пространствами $T^* : H_2 \to H_1$ – его гильбертов сопряженный. Докажите, что

(а) $\ker T^* = (\operatorname{Im} T)^\perp$ (б) $\overline{\operatorname{Im} T} = (\operatorname{Ker} T^*)^\perp$ (в) $H_2 = \overline{\operatorname{Im} T} \oplus \ker T^*$ (г) T изометрия $\Leftrightarrow T^*T = id$.

Определение: Оператор $p \in B(H)$ называется проектором, если $p = p^* = p^2$.

Задача 3. Докажите, что p проектор в смысле определения выше тогда и только тогда, когда p ортогональный проектор в геометрическом смысле, то есть существует замкнутое подпространство $H_0 \subset H$, такое что $p(x) = x$ для всех элементов H_0 и $p(x) = 0$ для всех $x \in H_0^\perp$.

Задача 4. Докажите равносильность следующих свойств оператора $V \in B(H)$:

(1) $VV^*V = V$ (2) V^*V – проектор (3) ограничение V на $(\ker V)^\perp$ изометрия.

Задача 5. Пусть $(E, \|.\|_i, I)$ – полинормированное пространство. Докажите, что

(а) $x_n \to x$ тогда и только тогда, когда $\|x_n - x\|_i \to 0$ для всех индексов $i \in I$;

(б) E хаусдорфово тогда и только тогда, когда для любого ненулевого $x \in E$ найдется $i \in I$, такой что $\|x\|_i > 0$.

Задача 6. Пусть $T : (E_1, \|.\|_i, I) \to (E_2, \|.\|_j, J)$ линейный операто. Докажите, что он непрерывен тогда и только тогда, когда для любого $j \in J$ найдутся $i_1, i_2, \ldots, i_k \in I$ и $C > 0$, такие что $\|x\|_j \leqslant C \max\{\|x\|_{i_1}, \ldots \|x\|_{i_k}\}$ для всех $x \in E_1$.