

НМУ, Алгебра-3
Листок 2. 18.09.2022

Задача 1. Для всякого объекта соответствующей категории найдите универсальные морфизмы в следующие забывающие функторы: $Ab \rightarrow Grp, Rng \rightarrow Ab, Top \rightarrow Set, Set_* \rightarrow Set$.

Задача 2. Пусть D — категория. Зададим функтор $Y : D^{op} \rightarrow Set^D$ на объектах как $Y(r) = Hom_D(r, -)$, а на морфизмах следующим образом: $f : s \rightarrow r$ переходит в естественное преобразование $Hom_D(f, -)$ между функторами $Y(r)$ и $Y(s)$. Докажите, что Y полный и строгий.

Задача 3. Опишите все наборы теоретико-множественных отображений $f_R : R \rightarrow R$, где R пробегает все кольца, такие, что для любого гомоморфизма $g : R \rightarrow S$ выполнено $g \circ f_S = f_R \circ g$.

Задача 4. Пусть A — нётерово кольцо. Докажите, что кольцо $A[[x]]$ степенных рядов также нётерово.

Задача 5. Пусть A — нётерово кольцо, а S — мультипликативное подмножество. Докажите, что $S^{-1}A$ также нётерово.

Задача 6. Пусть A — коммутативное кольцо, а \mathfrak{p} — его простой идеал. Докажите, что кольцо $A_{\mathfrak{p}}$ локально.

Задача 7. Пусть M — A -модуль, а S — мультипликативное подмножество. Зададим $S^{-1}M$ как модуль, состоящий из классов эквивалентности m/s , где $m \in M, s \in S$ и эквивалентность задается как $(m, s) \sim (m', s')$, если $s_1(ms' - sm') = 0$ для некоторого $s_1 \in S$. Докажите, что $S^{-1}M \simeq M \otimes_A S^{-1}A$.