Идеалы, фактор-кольца.

Задача 1. Пусть R — (коммутативное) кольцо.
а) (Вторая теорема об изоморфизмах) Пусть I идеал в R, а S — подкольцо в R. Пусть

$$I + S = \{x + y \mid x \in I, y \in S\}.$$

Тогда

- $I + S$ — подкольцо в R;
- $I \cap S$ идеал в S;
- $(I + S)/I \cong S/(I \cap S)$.

б) (Третья теорема об изоморфизмах) Пусть I и J — идеалы в кольце R, причём $I \subset J$. Докажите, что

$$(R/I)/(J/I) \cong R/J$$

.

в) Пусть $\alpha \in \Bbbk \supseteq \mathbb{F}$, где $\Bbbk$ — произвольное поле, $\mathbb{F}$ — простое подполе. Пусть существует $f \in \mathbb{F}[x]$ такой, что $f(\alpha) = 0$, причём степень f минимальна. Докажите, что $\mathbb{F}[\alpha] \cong \mathbb{F}[x]/(f(x))$.

г) Примените вторую теорему об изомофризме к $R = \mathbb{Z}, I = m\mathbb{Z}, J = n\mathbb{Z}$.

д) Пусть $n \in \mathbb{Z}$. Докажите, что $\mathbb{Z}[i]/n\mathbb{Z}[i] \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x]/(x^2 + 1)$.

Задача 2. Верно ли, что если $A \cong B$ и $C \cong D$, $C \subset A$, $D \subset B$ — идеалы, то $A/C \cong B/D$?

Задача 3. Пусть I, J — идеалы в R,

$$IJ = \{x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \mid x_i \in I, y_i \in J, n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$$

$$I + J = \{x + y \mid x \in I, j \in J\}$$

а) Докажите, что $I + J, IJ, I \cap J$ — идеалы, причём $IJ \subseteq I \cap J$. Приведите пример, когда $IJ \neq I \cap J$.

б) Докажите, что радикал идеала

$$\sqrt{I} = \{a \in R \mid a^n \in I \text{для некоторого } n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$$

является идеалом и $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J}$.

Задача 4. Докажите, что кольцо **а)** $\mathbb{Z}[x]$; **б)** $\Bbbk[x, y]$ не является евклидовым.

Задача 5*. Пусть R — евклидово кольцо, в котором остаток определён однозначно. Докажите, что $R \cong \Bbbk[x]$, где $\Bbbk$ — некоторое поле.

Задача 6. а) Докажите, что кольцо $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}]$ не является Евклидовым кольцом.

б*) Докажите, что кольцо $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}]$ является кольцом главных идеалов.

в*) Докажите, что если любой простой идеал в кольце — главный, то кольцо является кольцом главных идеалов.

г*) Пусть R — Евклидово кольцо. Докажите, что существует такой простой элемент $p \in R$, что $\pi(R^\times) = (R/pR)^\times$, где $\pi\colon R \to R/(p)$ — канонический гомоморфизм.

д*) Докажите, что кольцо $\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 + 1)$ является кольцом главных идеалов, но не является Евклидовым.

Задача 7. Перечислите все идеалы в $\Bbbk[[t]]$. Какие из них просты? Максимальны?

Задача 8. Являются ли нётеровым **а)** кольцо многочленов $\Bbbk[[x_1, \ldots, x_n]]$;

б) кольцо $C(\mathbb{R})$ непрерывных функции $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

в*) локализация $S^{-1}R$ нётерова кольца по некоторому мультипликативному подмножеству?

Задача 9. а) Пусть $f\colon \mathbb{R} \xrightarrow{t\mapsto(t,t^2,\dots,t^n)} \mathbb{R}^n$, $A = \operatorname{Im} f$. Задайте A явно как нули некоторого набора многочленов. Можно ли задать это множество как множество нулей конечного набора многочленов? Если да, предъявите их явно.

б) Пусть $p \in \mathbb{Z}_{>0}$ — простое, $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Пусть $I = \{f \in \mathbb{Z}[x] \mid f(a,b) = 0 \pmod p\}$. Докажите, что I — идеал, порождённый тремя образующими.

Задача 10. Явно предъявите в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$ неприводимый элемент, не являющийся простым. Является ли это кольцо Евклидовым?

Задача 11. а) Два идеала называются *взаимно простыми*, если $I + J = R$. Докажите, что если идеал I взаимно прост с $J_1, \dots, J_n$, то он взаимно прост с их пересечением.
б) (Китайская теорема об остатках) Пусть в наборе идеалов $I_1, \dots, I_n$ кольца R любые два взаимно просты и $I = \cap_{i=1}^n I_i$. Докажите, что $R/I \cong (R/I_1) \times \ldots \times (R/I_n)$.