

**Независимый Московский Университет,  
Топология-3, осень 2022**

**5**

Напомним обозначения из лекции. Пусть дано поле  $\mathbb{F}$  и три векторных пространства  $C', C, C''$  над ним, снабжённые *дифференциалами*

$$\partial' : C' \rightarrow C', \partial : C \rightarrow C, \partial'' : C'' \rightarrow C'',$$

то есть эти морфизмы удовлетворяют

$$\partial' \circ \partial' = 0, \partial \circ \partial = 0, \partial'' \circ \partial'' = 0.$$

Векторные пространства вместе с дифференциалами называются *дифференциальными пространствами*. Точная последовательность дифференциальных пространств

$$\boxed{0 \rightarrow C' \xrightarrow{\iota} C \xrightarrow{\pi} C'' \rightarrow 0}$$

задаёт ТОЧНУЮ ГОМОЛОГИЧЕСКУЮ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

$$\dots \leftarrow H(C'') \xleftarrow{\pi_*} H(C) \xleftarrow{\iota_*} H(C') \xleftarrow{\delta} H(C'') \leftarrow \dots,$$

где определения

$$\pi_* : H(C) \rightarrow H(C'') : [z]_C \mapsto [\pi(z)]_{C''}$$

и

$$\iota_* : H(C') \rightarrow H(C) : [z']_{C'} \mapsto [\pi(z')]_C$$

очевидны, а *связывающий гомоморфизм* определяется как

$$\delta : H(C'') \rightarrow H(C') : [z'']_{C''} \mapsto [\iota^{-1} \circ \partial \circ \pi^{-1}(z'')]_{C'}.$$

**5.1.** Проверьте корректность всех определений.

**5.2.** Проверьте (в каждом члене) точность точной гомологической последовательности.

**5.3.** Предложите *градуированную* версию введённых понятий и проверьте все свойства корректности и точности.

**5.4.** Пусть дан абстрактный симплициальный комплекс  $(V, S)$  и его *подкомплекс*  $(V', S')$ . Примените рассмотренные выше конструкции к  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$  и объектам

$$C = C_\bullet((V, S); \mathbb{F}_2), C' = C_\bullet((V', S'); \mathbb{F}_2).$$

Вложение  $\iota : C' \hookrightarrow C$  тавтологично, и определим

$$C'' := \frac{C}{\iota(C')};$$

определить дифференциал  $\partial'' : C'' \rightarrow C''$  и проверить корректность введённого определения предоставляется вам. Проекция  $\pi$  определяется тавтологично. Для определения точной гомологической последовательности в этом (основном) случае необходимо ещё ввести *аугментацию*  $C'' \rightarrow \mathbb{F}_2$ ; сделайте это.

**5.5.** Проведите все конструкции из предыдущих задач для *графа*  $(V, S)$  (то есть  $\max(\{\#\sigma \mid \sigma \in S\}) = 1$ ) и множества его вершин, то есть  $(V', S') = (V, \{\{v\} \mid v \in V\})$ .

13 октября, Г.Б. Шабат