Топология и дифференциальные формы

Листок №5

Напомним, что для двух комплексов V^* и W^* определён комплекс морфизмов $\mathrm{Hom}^*(V,W)$, где $\mathrm{Hom}^i(V,W) := \prod_n (V^n, W^{n+i})$, а дифференциал задаётся по формуле $(df)(v) = f(dv) + (-1)^{|f|} d(f(v))$. Напомним, что отображение f замкнуто в комплексе морфизмов, если оно является морфизмом комплексов, и точно, если он гомотопен нулю.

Назовём комплекс I^* *h-инъективным* [1], если для каждого ацикличного комплекса H^* комплекс $\mathrm{Hom}^*(H,I)$ ацикличен. Иными словами, каждый морфизм из ацикличного H в I гомотопен нулю.

Задача 5.1: Покажите, что комплекс инъективных объектов, ограниченный снизу, h-инъективен.

Задача 5.2: Пусть $0 \longrightarrow A^* \longrightarrow B^* \longrightarrow C^* \longrightarrow 0$ это точная тройка комплексов и пусть I^* это h-инъективный комплекс. Постройте точную тройку комплексов

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C^*, I^*) \longrightarrow \mathrm{Hom}(B^*, I^*) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A^*, I^*) \longrightarrow 0$$

Задача 5.3: Пусть $A^* \longrightarrow B^*$ — квазиизоморфизм и пусть I^* это h-инъективный комплекс. Покажите, что $\mathrm{Hom}(B^*, I^*) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A^*, I^*)$ это квазиизоморфизм комплексов.

Задача 5.4: Назовём h-инъективной резольвентой комплекса A^* квазиизоморфизм $A^* \longrightarrow I^*$ в h-инъективный комплекс. Покажите, что h-инъективная резольвента единственна с точностью до гомотопии.

Задача 5.5: Пусть V^* — ограниченный слева комплекс. Пусть $f : V^* \longrightarrow L^*$ квазиизоморфизм. Пусть F это точный слева функтор такой, что $R^k(L^i) = 0$ для всех i и для всех $k > 0$. Покажите, что $\mathbb{R}^k F(V^*) = H^k(F(L^*))$.

Задача 5.6: Пусть G — группа (дискретная). Покажите, что функтор инвариантов $V^G := \{v \in V | gv = v \forall g \in G\}$ на категории представлений группы точен слева. Соответствующий правый производный функтор называется когомологиями группы G с коэффициентами в V и обозначается через $H^*(G,V)$.

Задача 5.7: Покажите, что если G — конечна, то $H^k(G,V) = 0$ для любого $k > 0$ и для любого представления над полем характеристики ноль.

Задача 5.8: Пусть X это топологическое пространство, для которого категория накрытий, и, следовательно, категория локально постоянных пучков эквивалентна категории множеств с действием $\pi_1(X)$. (Например, X связно и локально односвязно). Пусть $\mathcal{V}$ это локально постоянный пучок на X; обозначим через V соответствующее представление $\pi_1(X)$. Докажите, что $\Gamma(X, \mathcal{V}) = V^{\pi_1(X)}$. Приведите пример, показывающий, что, вообще говоря, $H^k(X, \mathcal{V}) \neq H^k(\pi_1(X), V)$.

Задача 5.9: Пусть $p : Y \longrightarrow X$ — накрытие. Покажите, что функтор p_* между категориями пучков абелевых групп точный.

[1] иногда ещё называется K-инъективным

Задача 5.10: Пусть $p : Y \longrightarrow X$ — накрытие, и пусть Y стягиваемо. (В частности, X это пространство типа $K(\pi_1(X), 1)$). Пусть $\underline{\mathbb{Q}_Y}$ — постоянный пучок абелевых групп на Y со слоем $\mathbb{Q}$. Докажите, что пучок $\mathcal{Q} := p_* \underline{\mathbb{Q}}_Y$ локально постоянный. Какому представлению $\pi_1(X)$ он соответствует? Покажите, что соответствующее представление (обозначим его через Q) инъективно как объект категории представлений $\pi_1(X)$ (над целыми числами). Покажите, что любое представление $\pi_1(X)$ можно вложить в прямое произведение $\prod Q$.

Задача 5.11: В предыдущих обозначениях, покажите, что $H^k(X, \mathcal{Q}) = 0$ для $k > 0$.

Задача 5.12: Покажите, что если X это пространство вида $K(\pi_1(X), 1)$, то $H^k(X, \mathcal{V}) = H^k(\pi_1(X), V)$.
Подсказка: напишите резольвенту любого представления V с помощью представлений вида $\prod Q$.

Задача 5.13: Вычислите минимальную модель для комплексного проективного пространства $\mathbb{CP}^n$.

Задача 5.14: Пусть A и B две дг-алгебры, и пусть $f_0, f_1, f_2 : A \longrightarrow B$ морфизмы дг-алгебр. Предположим, что $H : A \longrightarrow B \otimes \Omega_1$ это гомотопия между f_0 и f_1 и $F : A \longrightarrow B \otimes \Omega_1$ это гомотопия между f_1 и f_2. Рассмотрим дг-алгебру форм на кресте $t_2(t_1 - 1) = 0$ Ω_+, заданную образующими t_1, t_2, dt_1, dt_2 и соотношениями $t_2(t_1 - 1) = t_2 dt_1 = 0, t_1 dt_2 = dt_2$. Постройте два отображения $p_1, p_2 : \Omega_+ \longrightarrow \Omega_1$ и постройте такое отображение $X : A \longrightarrow B \otimes \Omega_+$, что две композиции X с $id \otimes p_1$ и $id \otimes p_2$ $A \longrightarrow B \otimes \Omega_+ \longrightarrow B \otimes \Omega_1$ равны H и F.

Задача 5.15: Пусть $\Lambda(V)$ — внешняя алгебра от конечномерного пространства, градуированная степенью формы. Пусть $d : \Lambda(V) \longrightarrow \Lambda(V)$ это дифференцирование, в квадрате равное нулю. Покажите, что оно однозначно задаётся своим ограничением $d : V \longrightarrow \Lambda^2(V)$. Обозначим скобкой отображение $[-,-] : \Lambda^2(V^\vee) \longrightarrow (\Lambda^2(V))^\vee \longrightarrow V^\vee$, полученное обращением (существующим в силу конечномерности) канонического морфизма $(\Lambda^2(V))^\vee \longrightarrow \Lambda^2(V^\vee)$ и двойственного отображения $d^\vee$. Докажите, что скобка $[-,-]$ удовлетворяет тождеству Якоби. Покажите, что алгебра $(\Lambda(V), d)$ минимальна если и только если соответствующая алгебра Ли нильпотентна.

Задача 5.16: Пусть X это букет $S^2 \vee S^3$. Постройте минимальную модель для X до степени 6 (или до какой сможете).