Топология и дифференциальные формы

Листок №4

Фильтрации в этом листочке могут быть как возрастающими, так и убывающими.

Задача 4.1: Пусть $(V^*, d : V^* \longrightarrow V^{*+1})$ — комплекс объектов в абелевой категории. Рассмотрим комплексы F^iV^*, заданные по формуле $(F^iV)^k = V^k$ если $k \geq i$ и $(F^iV)^k = 0$ если $k < i$, с дифференциалами либо d либо ноль. Покажите, что F^iV задают фильтрацию на V. Вычислите gr_F.

Задача 4.2: Пусть $(V^*, d : V^* \longrightarrow V^{*+1})$ — комплекс объектов в абелевой категории. Рассмотрим комплексы F^iV^*, заданные по формуле $(F^iV)^k = V^k$ если $k < i$, $(F^iV)^i = \operatorname{Ker} d$ и $(F^iV)^k = 0$ если $k > i$, с соответствующими дифференциалами. Покажите, что F^iV задают фильтрацию на V. Вычислите gr_F.

Задача 4.3: Рассмотрим комплекс абелевых групп V^* с убывающей исчерпывающей фильтрацией $\dots \subset F^pV \subset F^{p-1}V \subset \dots \subset F^0V = V$. Предположим, что для любого k существует такое число N, что $F^NV^k = 0$. Положим $Z_r^{p,q} := \{x \in F^pV^{p+q} | dx \in F^{p+r}V^{p+q+1}\}$. Покажите, что $Z_{r-1}^{p+1,q-1} \subset Z_r^{p,q}$ и что $dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} \subset Z_r^{p,q}$.

Задача 4.4: Положим $B_r^{p,q} := Z_{r-1}^{p+1,q-1} + dZ_{r-1}^{p-r+1,q+r-2} \subset Z_r^{p,q}$. Положим $E_r^{p,q} := Z_r^{p,q}/B_r^{p,q}$. Покажите, что d индуцирует отображение $d_r : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$, в квадрате равное нулю.

Задача 4.5: Покажите, что $E_{r+1}^{p,q}$ это когомологии дифференциала d_r.

Задача 4.6: Покажите, что $E_0^{p,q} = \mathrm{gr}^p V^{p+q} = F^pV^{p+q}/F^{p+1}V^{p+q}$.

Задача 4.7: Покажите, что для каждых p, q существует такое N, что $E_M^{p,q}$ не зависит от M для $M \geq N$. Мы назовём эту группу $E_\infty^{p,q}$.

Задача 4.8: Покажите, что индуцированная F фильтрация на когомологиях $H(V)$ исчерпывающа и имеет конечную длину.

Задача 4.9: Покажите, что $E_\infty^{p,q} = \mathrm{gr}^p H^{p+q}(V)$.

Таким образом, мы построили спектральную последовательность фильтрованного комплекса с конечной (в каждом члене) фильтрацией.

Задача 4.10: Убедите себя в том, что вышеописанная конструкция работает в любой абелевой категории.

Задача 4.11: Покажите, что морфизм фильтрованных объектов абелевой категории $f : (A, F^*A) \longrightarrow (B, F^*B)$, уважающий фильтрацию (в том смысле, что $f(F^kA) \subset F^kB$), индуцирует морфизм $\mathrm{gr}\, f : \mathrm{gr}\, A \longrightarrow \mathrm{gr}\, B$. Докажите, что если фильтрации были конечные и исчерпывающие, то из того, что $\mathrm{gr}\, f$ — изоморфизм, следует, что f — изоморфизм.[1]

[1] В общем случае из того, что $\mathrm{gr}\, f$ изоморфизм, можно извлечь только то, что f задаёт изоморфизм $\lim_q \operatorname{colim}_p F^pA/F^qA \longrightarrow \lim_q \operatorname{colim}_p F^pB/F^qB$

Задача 4.12: Покажите, что если (A, FA) это фильтрованная дг-алгебра (с ограниченной фильтрацией), то каждый лист $E_r^{*,*}$ спектральной последовательности имеет структуру дг-алгебры.

Задача 4.13: Покажите, что если

$$\begin{array}{ccccc} F & \longrightarrow & E & \longrightarrow & B \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ F' & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & B' \end{array}$$

коммутативная диаграмма гладких многообразий, в которой каждая горизонталь — это расслоение, и вертикальные стрелки индуцируют изоморфизмы $H^*_{dR}(F') \longrightarrow H^*_{dR}(F)$ и $H^*_{dR}(B') \longrightarrow H^*_{dR}(B)$, то стрелка $H^*_{dR}(E') \longrightarrow H^*_{dR}(E)$ это тоже изоморфизм.

Задача 4.14: Вычислите (как угодно) когомологии де Рама окружности S^1 и n-мерной сферы S^n. Вычислите (в смысле, вычислите каждый лист и все дифференциалы) спектральную последовательность расслоения $S^1 \longrightarrow S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{CP}^n$, желательно, не вычисляя когомологии $\mathbb{CP}^n$ непосредственно.

Задача 4.15: Предположим, что у некоторой сходящейся спектральной последовательности $E_2^{p,q} = 0$ если только $q \neq 0$ или n. Постройте точную последовательность

$$0 \longrightarrow E_\infty^{p,n} \longrightarrow E_2^{p,n} \longrightarrow E_2^{p+n+1,0} \longrightarrow E_\infty^{p+n+1,0} \longrightarrow 0.$$

Задача 4.16: Покажите, что для локально постоянного пучка $\mathcal{F}$ конечномерных векторных пространств и компактного многобразия[2] X когомологии $H^i(X, \mathcal{F})$ конечномерны. Покажите, что эйлерова характеристика $\chi_{\mathcal{F}}(M) := \sum_i (-1)^i \dim H^i(X, \mathcal{F})$ зависит только от ранга $\mathcal{F}$ и от обычной эйлеровой характеристики $\chi(M) := \chi_{\mathbb{R}}(M)$.

Задача 4.17: Покажите что для любого расслоения компактных многообразий $F \longrightarrow E \longrightarrow B$ верно, что $\chi(E) = \chi(F)\chi(B)$.

[2] на самом деле любого пространства, на котором существует ацикличное покрытие