Топология и дифференциальные формы

Листок №3

Задача 3.1: Пусть X — гладкое многообразие, и $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — стандартный симплекс. Сингулярный симплекс $\Delta^n \longrightarrow X$ называется гладким, если он продолжается на некоторую открытую окрестность Δ^n в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что граница сингулярного симплекса гладкая. Докажите, что комплекс функций на гладких сингулярных симплексах (комплекс гладких сингулярных коцепей) вычисляет сингулярные когомологии X.

Задача 3.2: Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ это две абелевы категории. Пусть заданы набор аддитивных функторов $F^n : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}, n \geq 0$, и пусть для каждой точной последовательности $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ в $\mathcal{A}$ и для каждого $n \geq 0$ задан морфизм $\delta : F^n(C) \longrightarrow F^{n+1}(A)$ в $\mathcal{B}$. Предположим, что этот гомоморфизм индуцирует длинную точную последовательность, в том смысле, что последовательности

$$F^k(A) \longrightarrow F^k(B) \longrightarrow F^k(C) \longrightarrow F^{k+1}(A) \longrightarrow F^{k+1}(B)$$

точны в каждом члене для любого $k \in \mathbb{Z}$. (Мы предполагаем, что $F^k = 0$ для $k < 0$). Предположим, что эти последовательности функториальны в том смысле, что для каждого гомоморфизма коротких точных последовательностей в $\mathcal{A}$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\
0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

каждый из индуцированных квадратов

$$\begin{array}{ccc}
F^n(C) & \longrightarrow & F^{n+1}(A) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
F^n(C') & \longrightarrow & F^{n+1}(A')
\end{array}$$

коммутативен. Такие данные называются дельта-функтором из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$. Докажите, что в такой ситуации F^0 точен слева.

Задача 3.3: Пусть $\{F^n, \delta_F\}$ и $\{G^n, \delta_G\}$ это два дельта-функтора $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$. Морфизмом дельта-функторов называется набор морфизмов функторов $f^n : F^n \longrightarrow G^n$ такой, что для каждой короткой точной последовательности $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ в $\mathcal{A}$ диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
F^n(C) & \longrightarrow & F^{n+1}(A) \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
G^n(C) & \longrightarrow & G^{n+1}(A)
\end{array}$$

коммутативны. Дельта-функтор F называется универсальным, если для любого дельта-функтора G и любого морфизма функторов $f : F^0 \longrightarrow G^0$ существует морфизм дельта-функторов $f^n : F^n \longrightarrow G^n$ такой, что $f^0 = f$. Докажите, что универсальный дельта-функтор единственнен с точностью до единственного изоморфизма.

Задача 3.4: Дельта-функтор $\{F^n, \delta_F\}$ называется стирающим, если для любого объекта A из $\mathcal{A}$ существует вложение $0 \longrightarrow A \longrightarrow I$ в объект I, для которого $F^i(I) = 0$ при $i > 0$. Докажите, что стирающий дельта-функтор универсален.

Задача 3.5: Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ это три абелевы категории, и пусть $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ и $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ два функтора. Предположим, что G точен слева, а F точен. Докажите, что $R^k(F \circ G) = F \circ R^k(G)$ для любого k.

Задача 3.6: Пусть $f : X \longrightarrow Y$ это морфизм топологических пространств. Докажите, что функтор $f^{-1} : Sh_{Ab}(Y) \longrightarrow Sh_{Ab}(X)$ точен, а функтор $f_* : Sh_{Ab}(X) \longrightarrow Sh_{Ab}(Y)$ точен слева. Обозначим его производные функторы через $R^k f_*$.

Задача 3.7: Покажите, что $R^k f_* \mathcal{F}$ можно вычислить как пучковизацию предпучка $U \mapsto H^i(f^{-1}U, \mathcal{F})$.

Задача 3.8: Вычислите слои $R^i f_* \underline{\mathbb{Z}}$ для всех i и во всех точках для случая, когда
а) $X = (0; 1), Y = \mathbb{R}$;
б) $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}, Y = \mathbb{R}$;
в) $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, Y = \mathbb{R}$,
а f во всех трёх случаях это естественное вложение.

Задача 3.9: Приведите пример неограниченного бикомплекса $(V^{*,*}, d_\rightarrow, d_\uparrow)$ векторных пространств такого, что все его строки $(V^{*,p}, d_\rightarrow)$ ацикличны, а его тотализация прямым произведением $(T^n := \oplus_{p+q=n} V^{p,q}, d_\rightarrow \pm d_\uparrow)$ неациклична.

Задача 3.10: Приведите пример неограниченного бикомплекса $(V^{*,*}, d_\rightarrow, d_\uparrow)$ векторных пространств такого, что все его строки $(V^{*,p}, d_\rightarrow)$ ацикличны, а его тотализация прямым произведением $(T^n := \prod_{p+q=n} V^{p,q}, d_\rightarrow \pm d_\uparrow)$ неациклична.[1]

Задача 3.11: Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ два пучка на пространстве X. Пусть U это открытое множество в X и пусть $j_U : U \longrightarrow X$ соответствующее открытое вложение. Докажите, что соответствие $U \mapsto Hom_{Sh(U)}(j_U^{-1}\mathcal{F}, j_U^{-1}\mathcal{G})$ задаёт пучок. Он обозначается через $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Докажите, что его глобальные сечения это гомоморфизмы между $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$.

Задача 3.12: Рассмотрим абелеву категорию предпучков абелевых групп на X. Докажите, что представимый предпучок χ_U, заданный по правилу $\chi_U(V) = \mathbb{Z}$, если $V \subset U$ и $\chi_U(V) = 0$ иначе проективен. **Подсказка.** Докажите более общее утверждение: категория аддитивных функторов из абелевой категории в категорию абелевых групп абелева, и представимые функторы в ней проективны. [2]

Задача 3.13: Пусть $\mathcal{U} = \{U_i\}, i \in I$ покрытие X с упорядоченным множеством индексов. Рассмотрим предпучки $A_k := \bigoplus_{J \subset I, \#J = k+1} \chi_{U_J}$ и $B_k := \bigoplus_{J \in I^{k+1}} \chi_{U_J}$.[3] Определите на A_* и на B_* дифференциалы таким образом, что для любого пучка $\mathcal{F}$ комплексы пучков $\mathcal{H}om(\mathcal{A}_*^+, \mathcal{G})$ и $\mathcal{H}om(\mathcal{B}_*^+, \mathcal{F})$ это, соответственно, упорядоченная и неупорядоченная резольвента Чеха для $\mathcal{F}$. Докажите, что комплексы предпучков A_* и B_* квазиизоморфны. [4] Выведите из их проективности, что эти комплексы гомотопически эквивалентны. Выведите отсюда, что упорядоченная и неупорядоченная резольвента Чеха любого пучка гомотопически эквивалентны.

[1] Тотализация Лорана у бикомплекса векторных пространств с ацикличными строками всегда ациклична.
[2] То есть, инъективен как объект двойственной категории.
[3] Напомним, что U_J это пересечение U_j по всем $j \in J$
[4] Вычислите когомологии $A_*(U)$ и $B_*(U)$ для каждого U; ответом будет либо ноль, либо $\mathbb{Z}$, в зависимости от того, входит U в покрытие или нет.