Топология и дифференциальные формы

Листок №2

Напомним, что объект абелевой категории I называется *инъективным*, если для любого мономорфизма $i : A \longrightarrow B$ и любого морфизма $f : A \longrightarrow I$ существует морфизм $g : B \longrightarrow I$ такой, что $gi = f$.

Задача 2.1: Докажите, что произведение (в том числе бесконечное) инъективных объектов инъективно.

Задача 2.2: Абелева группа A называется *делимой*, если отображение $A \longrightarrow A, a \mapsto na$ это сюръекция для любого $n \in \mathbb{N}$. Покажите, что инъективная абелева группа делима. Покажите, что делимая абелева группа инъективна.[1]. Выведите отсюда, что в категории абелевых групп достаточно инъективных объектов.

Задача 2.3: Пусть R это ассоциативное кольцо. Постройте структуру левого R-модуля на абелевой группе $\mathrm{Hom}_{Abelian\ groups}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Покажите, что в категории левых R-модулей достаточно инъективных объектов.

Задача 2.4: Докажите, что в категории представлений конечной группы над полем характеристики ноль каждый объект инъективен. Предъявите контрпример для бесконечной группы и в положительной характеристике.

Задача 2.5: Пусть дано гладкое многообразие M. При каких условиях предпучок точных k-форм на M является пучком?

Задача 2.6: Пусть $\mathcal{F}$ это постоянный пучок на пространстве X. Покажите, что для любой точки $x \in X$ отображение ограничения $\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}_x$ это изоморфизм.

Задача 2.7: Пусть $\mathcal{F}$ это локально постоянный пучок на пространстве X. Назовём подмножество $K \in X$ хорошим, если существует такая открытая окрестность $K \subset U$, что $\mathcal{F}|_U$ это постоянный пучок. Покажите, что для любых $x_1, \ldots, x_n \in K$ существует набор изоморфизмов $\rho_{ij} : \mathcal{F}_{x_i} \longrightarrow \mathcal{F}_{x_j}$, согласованных в том смысле, что $\rho_{jk}\rho_{ij} = \rho_{ik}$.

Задача 2.8: Пусть $\mathcal{F}$ это локально постоянный пучок на пространстве X и пусть $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$ это непрерывный путь в X. Постройте изоморфизм $\rho_\gamma : \mathcal{F}_{\gamma(0)} \longrightarrow \mathcal{F}_{\gamma(1)}$, зависящий только от класса гомотопии пути γ и согласованный с операцией гомотопии путей в том смысле, что если γ' это другой путь в X, такой, что $\gamma(1) = \gamma'(0)$, то $\rho_{\gamma'}\rho_\gamma = \rho_{\gamma'\gamma}$.[2]

Задача 2.9: Пусть A это ассоциативное кольцо с единицей; рассмотрим его как пред-аддитивную категорию с одним объектом. Пусть I это тождественный функтор на этой категории. Вычислите множество естественных преобразований $Nat_A(I, I)$.

---

[1] Докажите сначала, что морфизмы в делимую группу можно продолжить при вложениях вида $M \longrightarrow N$, где N порождена M и ещё одним элементом n. Дальше воспользуйтесь леммой Цорна

[2] Построенный изоморфизм называется преобразованием монодромии; он задаёт, для каждой точки $x \in X$, действие группы $\pi_1(X)$ на множестве (группе, пространстве...) $\mathcal{F}_x$. На самом деле для связного (достаточно хорошего — локальной односвязности, кажется, хватает) X монодромия задаёт эквивалентность категорий локально постоянных пучков на X и представлений $\pi_1(X, x)$.

Задача 2.10: Докажите, что в абелевой категории морфизм с нулевым ядром является мономорфизмом, а морфизм с нулевым коядром является эпиморфизмом.

Задача 2.11: Докажите 5-лемму в любой абелевой категории, не пользуясь теоремой Фрейда-Митчелла.

Задача 2.12: Пусть $0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow 0$ короткая точная последовательность, в которой I это инъективный объект. Докажите, что она расщепляется.[3]

Задача 2.13: Докажите, что свободный (например, левый) R-модуль проективный. Докажите, что любой проективный модуль это прямое слагаемое свободного, и наоборот.

Задача 2.14: Пучок $\mathcal{F}$ на пространстве X называется вялым (flabby, flasque), если для любых двух открытых множеств $V \subset U$ отображение ограничения $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$ сюръективно. Докажите, что вялые пучки приспособлены к функтору глобальных сечений. В частности, пучок Годемана (пучок разрывных сечений) любого пучка Γ-приспособлен.

Задача 2.15: Пусть Y замкнуто в X. Сечениями пучка $\mathcal{F}$ над Y называются элементы множества $\varinjlim \mathcal{F}(U)$, где предел берётся по всем открытым множествам, содержащим Y. Пучок $\mathcal{F}$ называется мягким (soft, mou), если любое его сечение над любым замкнутым множеством продолжается до глобального сечения. Покажите, что мягкие пучки приспособлены к функтору глобальных сечений.

Задача 2.16: Пусть X — топологическое пространство. Назовём его конусообразным, если пересечение всех непустых замкнутых подмножеств в нём непусто. Покажите, что постоянный пучок на конусообразном пространстве X мягкий.

Задача 2.17: Пусть X — топологическое пространство. Назовём дискретным конусом пространство X^c, состоящее, как множество, из X и ещё одной точки t, а открытые множества в нём это открытые множества в X (соответственно, замкнутые — замкнутые множества в X, к которым добавлена точка t). Покажите, что X^c конусообразно. Назовём дискретной надстройкой X пространство X^σ, полученное склейкой двух дискретных конусов по X. Докажите, что $H^{i+1}(X^\sigma, \underline{\mathbb{Z}}) = H^i(X, \underline{\mathbb{Z}})$ для $i \geq 1$, где $\underline{\mathbb{Z}}$ это постоянный пучок.

Задача 2.18: Пусть X — ориентированный граф. Назовём подмножество V его вершин замкнутым, если любой ориентированный путь в X, начинающийся из точки в V, заканчивается в точке в V. Покажите, что замкнутые подможества определяют топологию на множестве вершин X. Когда полученное пространство конусообразно?

[3] Скорее всего вам придётся пользоваться 5-леммой. Если не решили предыдущую задачу, решите эту для категории модулей.